

© 2024 г. М.В. БАЛАШОВ, д-р физ.-мат. наук (balashov73@mail.ru),  
К.З. БИГЛОВ (biglov.kz@phystech.edu)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),  
А.А. ТРЕМБА, канд. физ.-мат. наук (atremba@ipu.ru)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва;  
Московский физико-технический институт, Долгопрудный)

## О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ С МНОГОЗНАЧНЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ<sup>1</sup>

Рассматриваются некоторые задачи о многозначных отображениях, которые могут быть сведены к минимизации положительно однородной липшицевой функции на единичной сфере. Последняя задача может быть в некоторых случаях решена алгоритмом первого порядка – методом проекции градиента. В качестве одного из примеров рассмотрен случай, когда многозначное отображение есть множество достижимости автономной линейной управляемой системы. Для ряда постановок доказана линейная сходимость метода проекции градиента в рассматриваемой ситуации. Мы используем схему доказательства сходимости градиентного метода, предложенную Б.Т. Поляком, в случае выполнения неравенства Лежанского–Поляка–Лоясевича. В отличие от других способов решения, например при помощи аппроксимации множества достижимости, приведенные алгоритмы гораздо слабее зависят от размерности фазового пространства и других параметров задачи. Также возможна эффективная оценка ошибок. Численные эксперименты подтверждают эффективность рассматриваемого подхода. Помимо множества достижимости, рассмотренные алгоритмы могут быть применены к различным теоретико-множественным задачам с многозначными отображениями достаточно общего вида.

*Ключевые слова:* метод проекции градиента, многозначный интеграл, сильная выпуклость, опорное множество, условие Липшица, негладкий анализ.

DOI: 10.31857/S0005231024050024, EDN: YQFMTE

### 1. Введение

Пусть  $\mathbb{R}^n$  – вещественное евклидово пространство со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)$  и нормой  $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot, \cdot)}$ . Определим шар  $\mathcal{B}_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}$ , ( $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $r > 0$ ) и единичную сферу  $\mathcal{S}_1 = \partial\mathcal{B}_1(0)$ . Обозначим как  $\text{int}\mathcal{N}$  и  $\partial\mathcal{N}$  внутренность и границу множества  $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$  соответственно. Напомним, что опорной функцией для замкнутого выпуклого множества  $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$  и вектора  $p \in \mathbb{R}^n$  называется  $s(p, \mathcal{N}) = \sup_{x \in \mathcal{N}} (p, x)$ , а опорным

---

<sup>1</sup> Теоремы 1, 3, 4 и §5 получены М.В. Балашовым при финансовой поддержке РФФ, проект № 22-11-00042, <https://rscf.ru/project/22-11-00042/> в ИПУ РАН. Теорема 2 и численные результаты раздела 6 получены А.А. Трембой при финансовой поддержке РФФ, проект № 21-71-30005, <https://rscf.ru/project/21-71-30005/>.

множеством называется  $\mathcal{N}(p) = \{x \in \mathcal{N} : (p, x) = s(p, \mathcal{N})\}$ . Множество  $\mathcal{N}(p)$  называется опорным элементом, если оно одноточечно. Для выпуклого компакта  $\mathcal{N}$  множество  $\mathcal{N}(p)$  является субдифференциалом (в смысле выпуклого анализа) опорной функции  $s(p, \mathcal{N})$  в точке  $p$ . Функция  $s(p, \mathcal{N})$  липшицева с постоянной  $\|\mathcal{N}\| = \max\{\|x\| : x \in \mathcal{N}\}$ . Пусть  $P_{\mathcal{N}}x$  – метрическая проекция точки  $x \in \mathbb{R}^n$  на замкнутое выпуклое множество  $\mathcal{N}$ .

Пусть  $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  – выпуклый компакт,  $f(p) = s(p, \mathcal{N})$ . Рассмотрим задачу

$$(1) \quad \min_{\|p\|=1} f(p) = J.$$

Очевидно, что решение (1) – единичный вектор  $p_0$  такой, что  $p_0 = -z_0/\|z_0\|$ , где  $P_{\mathcal{N}}0 = \{z_0\}$  и  $J = (p_0, z_0) = -\|z_0\|$ . Также  $z_0 \in \mathcal{N}(p_0)$ . Таким образом поиск проекции нуля  $z_0 = P_{\mathcal{N}}0$  эквивалентен задаче (1). Решение общей задачи поиска проекции имеет вид  $P_{\mathcal{N}}x = x + P_{\mathcal{N}+(-x)}0$ .

Напомним ряд алгоритмов решения задачи проецирования точки на выпуклое замкнутое множество  $\mathcal{N}$ . Каждый из алгоритмов зависит от способа задания множества  $\mathcal{N}$ . Если  $\mathcal{N}$  – многогранник, то можно воспользоваться квадратичным программированием и решить задачу  $\min \|x\|^2$  при ограничениях  $(p_i, x) \leq s(p_i, \mathcal{N})$ , где  $\{p_i\}$  – набор единичных нормалей к граням  $\mathcal{N}$ . В ряде случаев можно применять метод альтернативных проекций при наличии условия трансверсальности, см. [1, § 8.5]. В [2] рассматриваются свойства оператора проектирования. Также рассматривается сходимость итерационного алгоритма проекции/отражения для нахождения пары точек, на которой достигается локальный минимум расстояния между двумя выпуклыми замкнутыми множествами или между замкнутым выпуклым множеством и замкнутым проксимально гладким множеством. Использование алгоритмов в духе метода условного градиента для нахождения проекций на выпуклые множества изучалось в [3]. В [4] авторы предложили итерационный алгоритм поиска проекции точки на множество уровня квадратичной функции. Некоторые алгоритмы поиска проекции Брегмана точки на замкнутое выпуклое множество могут быть найдены в [5].

Лучшая скорость сходимости, полученная в приведенных выше статьях, линейная. При этом предложенные алгоритмы зачастую не позволяют реализовать эффективный вычислительный процесс.

Далее предполагаем, что заданы опорная функция  $s(p, \mathcal{N})$  и опорное множество  $\mathcal{N}(p)$ . “Заданы” означает, что можно вычислить  $s(p, \mathcal{N})$  и  $\mathcal{N}(p)$  для любого вектора  $p \in \mathbb{R}^n$  с помощью формулы или достаточно эффективной вычислительной процедуры.

Пусть  $M \subset \mathbb{R}^n$  – выпуклый компакт,  $\mathcal{R}(\cdot) : [0, T] \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ ,  $\mathcal{R}(0) = \{0\}$  – непрерывное в метрике Хаусдорфа многозначное отображение с выпуклыми компактными значениями. Рассмотрим некоторые задачи, которые могут быть сведены к постановке (1).

**Задача (P1).** Для данного  $t \geq 0$  найти минимальное расстояние между точками множеств  $\mathcal{R}(t)$  и  $\mathcal{M}$ , т.е. величину  $\rho(\mathcal{R}(t), \mathcal{M}) = \inf_{x \in \mathcal{R}(t), y \in \mathcal{M}} \|x - y\|$ . Найти минимальное  $t \geq 0$ , при котором  $\rho(\mathcal{R}(t), \mathcal{M}) = 0$ .

**Задача (P2).** Для данного  $t \geq 0$  выяснить справедливость включения множеств  $\mathcal{R}(t) \subset \mathcal{M}$ . Найти максимальное  $t \geq 0$ , при котором  $\mathcal{R}(t) \subset \mathcal{M}$ .

**Задача (P3).** Для данного  $t \geq 0$  выяснить справедливость включения множеств  $\mathcal{R}(t) \supset \mathcal{M}$ . Найти минимальное  $t \geq 0$ , при котором  $\mathcal{R}(t) \supset \mathcal{M}$ .

Задачи (P1)–(P3) могут быть поставлены для произвольного многозначного непрерывного отображения с выпуклыми компактными значениями  $\mathcal{R}(t)$  и выпуклого компакта  $\mathcal{M}$ . Рассмотрим частный случай многозначного интеграла вида

$$(2) \quad \mathcal{R}(t) = \int_0^t \mathcal{F}(s) ds,$$

где  $\mathcal{F}$  – многозначное отображение с выпуклыми компактными значениями. По умолчанию предполагается, что  $0 \in \mathcal{F}(s)$  для всех  $s \geq 0$ . Интеграл рассматривается в смысле Аумана [6]:

$$\int_0^t \mathcal{F}(s) ds = \left\{ \int_0^t u(s) ds : u(s) \in \mathcal{F}(s) - \text{измеримая ветвь} \right\}.$$

По теореме Ляпунова о векторных мерах [7] интеграл является выпуклым компактом. Из формулы (2) и включения  $0 \in \mathcal{F}(s)$  для всех  $s \in [0, t]$  получаем возрастание  $\{\mathcal{R}(t)\}_{t \geq 0}$  по включению  $\mathcal{R}(t_1) \subset \mathcal{R}(t_2)$  для всех  $0 \leq t_1 \leq t_2$ . Также можно рассматривать множество  $\mathcal{M}$ , зависящее от  $t$ , т.е.  $\mathcal{M}(t)$ .

Опорная функция и опорное множество интеграла (2) могут быть легко вычислены: для единичного вектора  $p$  и любого  $t \geq 0$  имеют место равенства

$$(3) \quad s(p, \mathcal{R}(t)) = s\left(p, \int_0^t \mathcal{F}(s) ds\right) = \int_0^t s(p, \mathcal{F}(s)) ds, \quad \mathcal{R}(t)(p) = \int_0^t \mathcal{F}(s)(p) ds.$$

Другой класс множеств, для которых известна опорная функция и опорный элемент, – это конечные суммы линейных образов какого-то фиксированного множества  $\mathcal{M}$  с известными  $s(p, \mathcal{M})$  и  $\mathcal{M}(p)$ , к примеру  $\mathcal{M}$  может быть эллипсоидом. Пусть  $\mathcal{R}(t) = \sum_{k=1}^m A_k(t)B_1(0)$ ,  $A_k(t)$  – непрерывные невырожденные матрицы для всех  $t \geq 0$ . Тогда

$$(4) \quad s(p, \mathcal{R}(t)) = \sum_{k=1}^m s(p, A_k(t)B_1(0)) = \sum_{k=1}^m \|A_k^\top(t)p\|,$$

$$\mathcal{R}(t)(p) = \sum_{k=1}^m \frac{A_k(t)A_k^\top(t)p}{\|A_k^\top(t)p\|}.$$

Заметим, что конечная сумма эллипсоидов не является эллипсоидом в общем случае.

Одним из важнейших примеров является множество достижимости линейной автономной управляемой системы, которую рассмотрим в форме дифференциального включения

$$(5) \quad x'(t) \in Ax(t) + \mathcal{U}, \quad x(0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

где  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$  – компакт,  $0 \in \mathcal{U}$ . Множество достижимости (точки  $\mathbb{R}^n$ , в которые можно перевести систему (5) за время  $t$ ) представимо в виде

$$(6) \quad \mathcal{R}(t) = \int_0^t e^{As} \mathcal{U} ds.$$

Напомним, что наиболее важное усиление условия выпуклости для компактных множеств из  $\mathbb{R}^n$  – это сильная выпуклость с радиусом  $R > 0$ . Подмножество  $\mathbb{R}^n$  называется сильно выпуклым с радиусом  $R$ , если оно может быть представлено как пересечение шаров радиуса  $R$  [8, 9]. Это свойство также может быть выражено через модуль выпуклости [10]. В [8] было доказано, что многозначный интеграл (2) является сильно выпуклым, если многозначное отображение  $\mathcal{F}(s)$  имеет сильно выпуклые значения. В [11] была доказана в некотором виде локальная сильная выпуклость для интеграла (2) с  $\mathcal{F}(s) = A(s)U$ , где  $A(s)$  – некоторый класс гладких матриц, а  $U$  – многогранник. В [12] была рассмотрена аппроксимация второго порядка по времени типа Рунге–Кутты для дискретизации сильно выпуклых дифференциальных включений.

Различные задачи о многозначных интегралах могут решаться при помощи аппроксимации их значений. В [13] авторы описывают различные методы построений аппроксимаций множества достижимости управляемой системы, см. [13, табл. 1]. Один из самых общих и эффективных методов основывается на опорной функции (он также называется методом гиперплоскостей) [14]. Можно рассмотреть, например, внешнюю многогранную аппроксимацию для произвольного выпуклого компактного подмножества  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$  вида

$$(7) \quad \{x \in \mathbb{R}^n : (p, x) \leq s(p, \mathcal{M}), \quad \forall p \in \mathbb{G}\},$$

где  $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}^n$  – конечная сетка единичных векторов, и решить соответствующую задачу для аппроксимации. Недостаток такого подхода в том, что разумные приближения могут быть получены только в пространствах малой размерности  $2 \leq n < 5$  [15].

Также существуют подходы, использующие особые аппроксимации, например при помощи зонотопов [16] или эллипсоидальной техники [17]. Последняя иногда позволяет описывать множество достижимости локально.

В данной статье рассматриваются  $\mathcal{R}(t)$ ,  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{N}$  как значения многозначного интеграла или конечные суммы эллипсоидов. Показывается, как можно свести различные задачи, в первую очередь (P1)–(P3), о подобных множествах к

задаче (1). Минимизируемая в (1) функция  $f(p)$  оказывается при этом опорной функцией какого-то выпуклого компакта  $\mathcal{N}$ , зависящего от  $\mathcal{R}(t)$  и  $\mathcal{M}$ . Мы доказываем выполнение условия Лежанского–Поляка–Лоясевича [18, формула (4.6)] в задаче (1), что гарантирует линейную скорость сходимости метода проекции градиента. Опорная функция  $f(p)$  и ее градиент могут быть вычислены с помощью (3) для многозначного интеграла или (4) для суммы эллипсоидов. Опорная функции и ее градиент позволяют получить эффективную схему вычислений. Также рассматривается локальное условие сильной выпуклости: для некоторого  $R > 0$  для решения  $p_0$ ,  $\|p_0\| = 1$  задачи (1) должно иметь место включение  $\mathcal{N} \subset B_R(\mathcal{N}(p_0) - Rp_0)$ . При выполнении данного условия задача может быть решена методом проекции градиента с фиксированной величиной шага или выбором величины шага по Армихо. Во всех алгоритмах доказана линейная скорость сходимости, рассматриваются различные примеры.

Заметим, что есть другой способ решения задачи (1), который заключается в использовании метода условного градиента. Рассматриваются функция  $g(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ , начальная точка  $x_1 \in \mathcal{N}$  и итерации  $\bar{x}_k = \arg \max_{x \in \mathcal{N}}(-g'(x_k), x)$ ,  $x_{k+1} \in \text{Arg} \min_{x \in [x_k, \bar{x}_k]} g(x)$ . Отметим, что для обеспечения линейной сходимости указанного алгоритма обычно требуется сильная выпуклость множества  $\mathcal{N}$  [18, теорема 6.1, п. 5)].

### 1.1. Основные обозначения и вспомогательные результаты

Для множеств  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{N}$  из  $\mathbb{R}^n$  определяются операции  $\mathcal{M} + \mathcal{N} = \{x + y : x \in \mathcal{M}, y \in \mathcal{N}\}$  и  $\mathcal{M} \overset{*}{-} \mathcal{N} = \{x : x + \mathcal{N} \subset \mathcal{M}\} = \bigcap_{x \in \mathcal{N}}(\mathcal{M} - x)$ . Они называются суммой и разностью Минковского для множеств  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{N}$ .

Обозначим через  $\varrho(x, \mathcal{M}) = \inf_{y \in \mathcal{M}} \|x - y\|$  расстояние от точки  $x$  до множества  $\mathcal{M}$ .

*Расстояние Хаусдорфа* на пространстве выпуклых компактных подмножеств  $\mathbb{R}^n$  задается по формуле

$$h(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \max_{\|p\|=1} |s(p, \mathcal{M}) - s(p, \mathcal{N})|.$$

Введем функцию  $[a]_- = |a|$  для  $a \leq 0$  и  $[a]_- = 0$  для  $a > 0$ . Тогда  $[\min_{\|p\|=1}(s(p, \mathcal{M}) - s(p, \mathcal{N}))]_-$  называется полурасстоянием от  $\mathcal{N}$  до  $\mathcal{M}$ , оно равняется  $\max_{x \in \mathcal{N}} \varrho(x, \mathcal{M})$ .

Пусть множество  $\mathcal{R}(t)$  (2) зависит от параметра  $t$ . Будем обозначать *опорное множество* для вектора  $p$  как  $\mathcal{R}(t)(p)$ . Из определения Ауманна или Римана интеграла следует, что для произвольной матрицы  $J \in \mathbb{R}^{m \times n}$  имеет место  $J\mathcal{R}(t) = \int_0^t J\mathcal{F}(s) ds$ . В частности, для любого вектора  $p \in \mathbb{R}^n$  имеем  $\mathcal{R}(t)(p) = \int_0^t \mathcal{F}(s)(p) ds$ .

Множество  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$  называется *сильно выпуклым с радиусом*  $R > 0$ , если его можно представить как пересечение некоторого набора замкнутых евклидовых шаров радиуса  $R$ . Для произвольного сильно выпуклого множества  $\mathcal{M}$

с радиусом  $R$  существует другое сильно выпуклое с радиусом  $R$  множество  $\mathcal{M}$  такое, что  $\mathcal{M} + \mathcal{N} = \mathcal{B}_R(0)$  [8, 19]. Сильная выпуклость выпуклого компакта  $\mathcal{M}$  с радиусом  $R$  эквивалентна липшицевости опорного элемента  $\mathcal{M}(p)$  на единичной сфере: для всех  $\|p\| = \|q\| = 1$  выполняется  $\|\mathcal{M}(p) - \mathcal{M}(q)\| \leq R\|p - q\|$  [8].

Будем говорить, что выпуклое множество  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$  *равномерно гладкое с постоянной*  $r > 0$ , если  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \mathcal{B}_r(0)$ , где  $\mathcal{M}_0 \subset \mathbb{R}^n$  – выпуклый компакт. Это определение появлялось ранее, см. [20, определение 2.1].

Пусть  $\varepsilon > 0$ ,  $\mathcal{S}_0 \subset \mathbb{R}^n$  – гладкое многообразие без края,  $\bar{x} \in \mathcal{S}_0$ . Для дифференцируемой по Фреше функции  $f : \mathcal{S}_0 + \text{int}\mathcal{B}_\varepsilon(0) \rightarrow \mathbb{R}$  определим  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(f, \bar{x}) = \{x \in \mathcal{S}_0 : f(x) \leq f(\bar{x})\}$ . Пусть  $\mathcal{S}$  – гладкое многообразие с краем  $\partial\mathcal{S} \subset \{x \in \mathcal{S}_0 : f(x) = f(\bar{x})\}$ . Будем говорить, что на  $\mathcal{S}$  выполняется условие *Лежанского–Поляка–Лоясевича (LPL)* [18; 21, §3.2] с постоянной  $\mu > 0$ , если  $\Omega = \text{Arg min}_{x \in \mathcal{S}} f(x) \neq \emptyset$  и для всех  $x \in \mathcal{S}$  имеет место неравенство

$$\|P_{\mathcal{T}_x} f'(x)\|^2 \geq \mu(f(x) - f(\Omega)).$$

Здесь  $\mathcal{T}_x$  – касательное пространство к многообразию  $\mathcal{S}$  в точке  $x \in \mathcal{S}$ ,  $P_{\mathcal{T}_x}$  – ортогональный проектор на  $\mathcal{T}_x$ ,  $f'(x)$  – производная Фреше функции  $f$  в точке  $x \in \mathcal{S}$ .

*Лемма 1.* Для любых ненулевых векторов  $p, q \in \mathbb{R}^n$  имеет место

$$\left\| \frac{p}{\|p\|} - \frac{q}{\|q\|} \right\| \leq \frac{\|p - q\|}{\sqrt{\|p\| \|q\|}}.$$

*Предложение 1* [8]. Пусть многозначное отображение  $\mathcal{F} : [0, t] \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$  принимает сильно выпуклые значения  $\mathcal{F}(s)$  с интегрируемым на  $[0, t]$  радиусом  $R(s)$  для всех  $s \in [0, t]$  и непрерывно в метрике Хаусдорфа. Тогда интеграл  $\mathcal{R}(t) = \int_0^t \mathcal{F}(s) ds$  сильно выпуклый с радиусом  $R = \int_0^t R(s) ds$ .

Упомянем, что многозначный интеграл может быть сильно выпуклым, даже если множества  $\mathcal{F}(s)$  таковыми не являются. Такая ситуация типична в размерности  $n = 2$  [22]. Тем не менее множество достижимости линейной управляемой системы в размерности  $n \geq 3$  часто не является сильно выпуклым.

Рассмотрим элементарный пример системы (5) (похожая система рассматривается ниже в примере 1). Пусть множество управления – отрезок:  $\mathcal{U} = \text{co}\{\pm v\}$ . Введем вспомогательную аналитическую функцию  $g_p(s) = (p, e^{As}v)$ . Для фиксированного  $p$  опорное множество  $\mathcal{R}(t)(p)$  состоит из одного элемента, если  $g_p(s) \neq 0$ . Выполнение условия полного ранга

$$\text{span}\{A^i v\}_{i=0}^{n-1} = \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \quad \text{span } \mathcal{R}(t) = \mathbb{R}^n$$

гарантирует, что  $g_p$  не есть тождественный нуль. Из аналитичности  $g_p$  следует, что у уравнения  $g_p(s) = 0$  конечное число корней на  $[0, t]$ . Из конечности числа корней вытекает строгая выпуклость  $\mathcal{R}(t)$ . Для опорного элемента име-

ет место формула

$$(8) \quad \mathcal{R}(t)(p) = \int_0^t e^{As} v \times \text{sign } g_p(s) ds = \sum_{i=0}^k \epsilon_i \int_{s_i(p)}^{s_{i+1}(p)} e^{As} v ds,$$

где  $s_i(p)$ ,  $i = \overline{1, k}$  – корни  $g_p(s)$  на  $[0, t]$  (вследствие аналитичности  $g_p$  они изолированы и их конечное число),  $s_0 = 0$ ,  $s_{k+1} = t$ ,  $\epsilon_i = \pm 1$  есть знак  $g_p(s)$  при  $s \in [s_i, s_{i+1}]$ . Таким образом, исследование поведения опорного элемента сводится к исследованию зависимости корней аналитической функции  $g_p(s)$  от параметра  $p$ . Легко заметить, что если все корни простые (и для простоты лежат в интервале  $(0, t)$ ), то из теоремы о неявной функции следует, что они (корни) гладко зависят от  $p$  в некоторой окрестности, а значит, опорный элемент – тоже гладкая функция  $p$  в этой окрестности. Отсюда вытекает локальная липшицевость опорного элемента  $\mathcal{R}(t)(p)$  по  $p$ . Обратная ситуация возникает при наличии кратных корней на отрезке при некотором заданном  $p$ . Как показано в примере ниже, в таком случае характерно нарушение липшицевости опорного элемента в точке  $p$ , что ведет к отсутствию сильной выпуклости. Тем не менее легко показать, что множество векторов  $p$ , для которых функция  $g_p$  имеет кратные корни на  $[0, t]$ , имеет меру нуль. Некоторые обобщения подобного подхода на многозначные интегралы более общего вида приведены в [11].

Отметим, что если все собственные значения  $A$ , то оптимальное управление  $u(t) = \mathcal{U}(e^{A^\top(T-t)} p) = v \text{sign } g_p$  (как  $T - t$ ),  $t \in [0, T]$  имеет не более  $n - 1$  переключений, что является частным случаем теоремы Фельдбаума о числе переключений [23, теорема 2.11]. В примерах динамическая система задается уравнением  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $u \in \mathcal{U}$ ,  $t \in [0, T]$ . Оптимальное управление в такой системе, приводящее к опорному элементу множества достижимости  $\mathcal{R}(t)(p)$ , имеет вид [24]:

$$(9) \quad u(t) = \mathcal{U}(B^\top e^{A^\top(T-t)}), \quad t \in [0, T].$$

Рассмотрим систему

$$(10) \quad \dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = 0, \quad u \in \mathbb{R} : |u| \leq 1, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Следуя замечаниям выше, положим

$$g_p(s) = (p, e^{As} B) = \frac{1}{2} e^{-s} (p_1 s^2 + 2p_2 s + 2p_3).$$

Пусть  $p_0 = \frac{1}{3}(2, -2, 1)$ , заметим что  $g_{p_0}(s) = \frac{1}{3} e^{-s} (s - 1)^2$  имеет кратный корень при  $s = 1$ . Рассмотрим поведение опорного элемента в окрестности  $p_0$ . Напомним, что  $f(s) \asymp g(s)$ ,  $s \rightarrow 0$ , если  $f(s) = O(g(s))$  и  $g(s) = O(f(s))$ ,  $s \rightarrow 0$ .

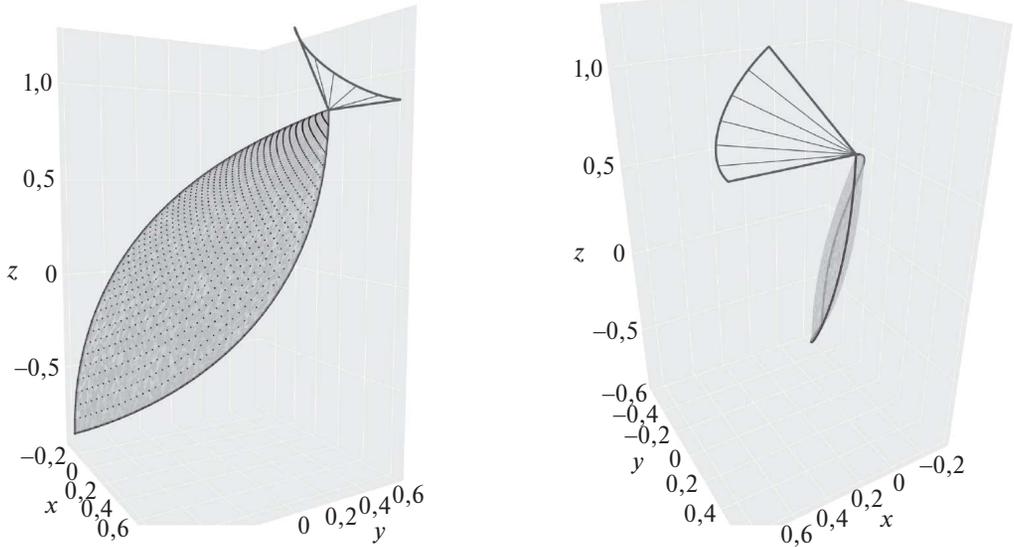


Рис. 1. Множество достижимости системы (10) и нормали, для которых нет локальной липшицевости опорного элемента, при  $t = 2$ .

Рассмотрим для  $\varepsilon \in (0, 1)$  вектор  $q = q(\varepsilon) = \frac{(2, -2, 1 - \varepsilon)}{\sqrt{9 - 2\varepsilon + \varepsilon^2}}$ . Легко заметить, что  $\|p - q(\varepsilon)\| \asymp \varepsilon, \varepsilon \rightarrow 0$ , а также найти корни  $g_{q(\varepsilon)} =: s_{1,2}(\varepsilon) = 1 \pm \sqrt{\varepsilon}$ . Тогда для  $t > 1 + \sqrt{\varepsilon}$  можно записать для опорного элемента

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(t)(p) - \mathcal{R}(t)(q) &= \int_{1 - \sqrt{\varepsilon}}^{1 + \sqrt{\varepsilon}} e^{-s} (s^2, 2s, 2)^\top ds, \\ \|\mathcal{R}(t)(p) - \mathcal{R}(t)(q)\| &\geq \int_{1 - \sqrt{\varepsilon}}^{1 + \sqrt{\varepsilon}} 2e^{-s} ds \asymp \sqrt{\varepsilon}, \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в окрестности точки  $p_0$  нарушается липшицевость опорного элемента, а значит множество  $\mathcal{R}(t)$  не сильно выпукло.

На рис. 1 показан вид множества достижимости системы при  $t = 2$ . Нормали, для которых нет локальной липшицевости опорного элемента, показаны на рис. 1 сверху, множество этих нормалей является частью границы нормального конуса в вершине множества. Кроме того, можно заметить, что множество достижимости обладает структурой, похожей на клеточный комплекс. Эта структура возникает вследствие того, что, благодаря (8), опорный элемент можно задать положениями и кратностями корней функции  $g_p(s)$  на отрезке  $[0, t]$ , а также знаком  $g_p(s)$  вблизи левого конца отрезка. Если матрица рассматриваемой системы имеет вещественные собственные значения, то суммарная кратность корней  $g_p(s)$  не превосходит  $(n - 1)$ . Можно показать,

что в этом случае произвольная конфигурация корней даст при подстановке в (8) некоторую точку  $\partial\mathcal{R}(t)$ . Рассмотрение наборов корней с различными суммарными кратностями позволяет выделить в множестве достижимости криволинейные ребра и грани. Некоторые обобщения рассуждений выше приведены в [11].

*Лемма 2.* Пусть  $A_1 = J^{-1}AJ$  – жорданова форма матрицы  $A$  системы (5),  $\mathcal{U}_1 = J^{-1}\mathcal{U}$ ,  $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$  – матрица перехода. Если множество  $\mathcal{R}_1(t) = \int_0^t e^{A_1 s} \mathcal{U}_1 ds$  сильно выпукло с радиусом  $r$ , то  $\mathcal{R}(t) = \int_0^t e^{As} \mathcal{U} ds$  также сильно выпукло с радиусом  $R = r\alpha^2/\beta$ , где  $\alpha = \|J\| = \max_{\|h\|=1} \|Jh\|$ ,  $\beta = \min_{\|h\|=1} \|Jh\|$ .

Заметим, что из [25, Теорема 3] следует, что любой эллипсоид

$$\mathcal{N} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{\lambda_k^2} \leq 1 \right\}, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0,$$

является сильно выпуклым с радиусом  $R = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_n}$ .

*Лемма 3.* Пусть в системе (5) множество  $\mathcal{U}$  является равномерно гладким с постоянной  $r > 0$ . Тогда множество  $\mathcal{R}(t)$  (6) является равномерно гладким с постоянной  $r_0 = r \int_0^t \frac{\lambda_n^2(s)}{\lambda_1(s)} ds$ , где  $\lambda_1(s) \geq \dots \geq \lambda_n(s) > 0$  – это полюсы эллипсоида  $e^{As} \mathcal{B}_1(0)$ .

Заметим, что из доказательства леммы 3 следует, что любой эллипсоид

$$\mathcal{N} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{\lambda_k^2} \leq 1 \right\}, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0,$$

является равномерно гладким с постоянной  $r = \frac{\lambda_n^2}{\lambda_1}$ .

В частности, леммы 2 и 3 показывают, что достаточно рассматривать системы (5) с матрицей  $A$ , приведенной к жордановой форме.

Следующее предложение оценивает убывание липшицево дифференцируемой функции за один шаг метода проекции градиента.

*Предложение 2* [26, Лемма 2]. Рассмотрим задачу  $\min_{\mathcal{M}} f(x)$  в  $\mathbb{R}^n$ . Пусть  $\mathcal{M}$  – замкнутое множество,  $f'$  – липшицева функция с постоянной  $L_1$ . Фиксируем  $0 < \lambda \leq \frac{1}{L_1}$ . Пусть  $x_0 \in \mathcal{M}$  и  $y_0 \in P_{\mathcal{M}}(x_0 - \lambda f'(x_0))$ . Тогда

$$f(x_0) - f(y_0) \geq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda} - L_1 \right) \|x_0 - y_0\|^2.$$

Для выполнения предыдущего утверждения условие Липшица для  $f'$  с постоянной  $L_1$  должно выполняться на отрезке  $[x_0, y_0]$ , см. доказательство утверждения 2.2 [27].

## 1.2. Дополнительные предположения о $\mathcal{R}(s)$

При решении задач (P1)–(P3) будем требовать наличие некоторых свойств у множеств, с которыми работаем. Приведем их здесь, чтобы далее не повторяться.

1. Множество  $\mathcal{R}(s)$  сильно выпукло с радиусом  $R_T > 0$  для всех  $s \in [0, T]$ .
2. Множество  $\mathcal{M}$  – равномерно гладкое с постоянной  $r > 0$ :  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \mathcal{B}_r(0)$ , при этом
  - (а) множество  $\mathcal{M}_0$  сильно выпукло с постоянной  $R_0 > 0$ .
  - (б)  $r > R_T$ .
3. Множество  $\mathcal{M}$  сильно выпукло с постоянной  $R_0 > 0$ .
4. Множество  $\mathcal{U}$  равномерно гладкое с постоянной  $r_{\mathcal{U}} > 0$ :  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 + \mathcal{B}_{r_{\mathcal{U}}}(0)$ .
5.  $r(t) > R_0$ , где  $r(t) = r_{\mathcal{U}} \int_0^t \frac{\lambda_n^2(s)}{\lambda_1(s)} ds$  и  $\lambda_1(s) \geq \dots \geq \lambda_n(s) > 0$  – это полуоси эллипсоида  $e^{As}\mathcal{B}_1(0)$ .

Первое утверждение выполняется, если, в частности, множество  $e^{As}\mathcal{U}$  сильно выпукло с радиусом  $R(s) > 0$ . Тогда из предложения 1 и линейности интеграла следует, что

$$\mathcal{R}(T) = \int_0^T e^{As}\mathcal{U} ds = \int_0^t e^{As}\mathcal{U} ds + \int_t^T e^{As}\mathcal{U} ds = \mathcal{R}(t) + \int_t^T e^{As}\mathcal{U} ds,$$

и получаем, что множество

$$\mathcal{R}(t) = \bigcap \left\{ \mathcal{R}(T) - x : x \in \int_t^T e^{As}\mathcal{U} ds \right\}$$

сильно выпукло с радиусом  $R_T = \int_0^T R(s) ds$  для всех  $t \in [0, T]$ .

## 1.3. Структура статьи

В разделах 2–4 приводятся достаточные условия для линейной сходимости метода проекции градиента в некоторой задаче оптимизации опорной функции, к которой сводятся задачи (P1)–(P3). Это решает задачи для фиксированного  $t \in [0, T]$ .

В разделе 5 обсуждается поиск начального приближения  $p_1$  для итерационного процесса. Даны оценки вероятности нахождения  $p_1$  случайным поиском.

В разделе 6 приводятся результаты различных численных экспериментов. Тут же рассматривается поиск оптимального значения  $t$  для задач (P1)–(P3).

## 2. Задача (P1)

**Используемые предположения:** 1, 2(a).

Для всех  $t \in [0, T]$  рассмотрим множество  $\mathcal{N}(t) = \mathcal{R}(t) + (-\mathcal{M}_0)$ . Множество  $\mathcal{N}(t)$  сильно выпукло с радиусом  $R = R_T + R_0$  как сумма сильно выпуклых множеств [19]. Равенство  $\mathcal{R}(t) \cap \mathcal{M} = \emptyset$  может быть переформулировано следующим образом: расстояние от нуля до  $\mathcal{N}(t)$  больше чем  $r > 0$ . Если это так, то  $0 \notin \mathcal{R}(t) + (-\mathcal{M})$ , а в противном случае  $0 \in \mathcal{R}(t) + (-\mathcal{M})$ . На языке опорных функций это сводится к задаче минимизации функции  $f(p) = s(p, \mathcal{N}(t)) = s(p, \mathcal{R}(t)) + s(p, -\mathcal{M}_0)$ :

$$(11) \quad \min_{\|p\|=1} f(p) = J.$$

Если  $J < -r$ , то расстояние от нуля до множества  $\mathcal{N}(t)$  больше  $r$ . Если же  $J \geq -r$ , то расстояние от нуля до множества  $\mathcal{N}(t)$  не превышает  $r$  и, следовательно,  $0 \in \mathcal{R}(t) + (-\mathcal{M})$ . Заметим, что

$$(12) \quad f'(p) = \mathcal{R}(t)(p) + (-\mathcal{M}_0)(p) = \int_0^t (e^{As}\mathcal{U})(p) ds + (-\mathcal{M}_0)(p).$$

*Теорема 1.* Фиксируем  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Предположим, что в (11)  $J < 0$ . Тогда при выполнении приведенных выше предположений функция  $f$  в (11) удовлетворяет условию LPL на многообразии  $\mathcal{S} = \{p \in \mathcal{S}_1 : f(p) \leq 0\}$  с постоянной  $\mu = |J|$ . Также функция  $f$  имеет градиент, удовлетворяющий условию Липшица с постоянной  $L_1 = \frac{R}{1-\varepsilon} = \frac{R_T+R_0}{1-\varepsilon}$  на множестве  $\{p \in \mathbb{R}^n : 1-\varepsilon \leq \|p\| \leq 1+\varepsilon\}$ .

Рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$(13) \quad p_1 \in \mathcal{S} \text{ (т.е. } f(p_1) \leq 0), \quad p_{k+1} = P_{\mathcal{S}_1}(p_k - \lambda f'(p_k)), \quad \lambda \in \left(0, \frac{1}{L_1}\right].$$

Если  $p_k \in \mathcal{S}$ , то  $p_{k+1} \in \mathcal{S}$ . Действительно, из предложения 2 следует, что

$$f(p_k) - f(p_{k+1}) \geq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda} - L_1 \right) \|p_k - p_{k+1}\|^2 \geq 0, \quad f(p_{k+1}) \leq f(p_k) \leq 0.$$

Рассмотрим точку  $p_k - \lambda f'(p_k)$ . Имеем

$$\|p_k - \lambda f'(p_k)\| \geq (p_k, p_k - \lambda f'(p_k)) = 1 - \lambda(p_k, f'(p_k)) = 1 - \lambda f(p_k) \geq 1.$$

*Теорема 2.* Предположим, что функция  $f$  липшицева с постоянной  $L = \|\mathcal{N}(t)\|$ , отображение  $f'$  липшицево на  $\mathcal{S}_1$  с постоянной  $R = R_T + R_0$ . Также предполагаем  $J < 0$ . Положим  $L_1 = 2R$ .

Фиксируем  $\lambda \in (0, \min\{\frac{1}{L_1}, \frac{1}{2L}\})$ . Тогда алгоритм (13) сходится к минимуму  $p_0 \in \mathcal{S}_1$  с линейной скоростью:

$$\begin{aligned} f(p_{k+1}) - f(p_0) &\leq q (f(p_k) - f(p_0)), \\ \|p_{k+1} - p_k\| &\leq q^{k/2} \sqrt{2\lambda(f(p_1) - f(p_0))}, \\ q &= 1 - \frac{\lambda|J|}{2L\lambda + 2} \in (0, 1). \end{aligned}$$

Следующий пример показывает, что условие острого минимума вида  $\exists \alpha > 0$ , такое что  $f(p) - f(p_0) \geq \alpha \|p - p_0\|$ , не выполняется для всех  $p \in \mathcal{S}$ .

Рассмотрим  $L > r > 0$ ,  $\|p_0\| = 1$  и множество  $\mathcal{N} = \mathcal{B}_r(-Lp_0)$ . Тогда для всех  $p \in \mathcal{S}_1$  имеем

$$s(p, \mathcal{N}) - s(p_0, \mathcal{N}) = L(1 - (p, p_0)) = \frac{L}{2} \|p - p_0\|^2.$$

*Замечание 1.* Приведенные выше результаты могут быть доказаны при более локальных условиях. Вместо предположения 1 о сильной выпуклости  $\mathcal{R}(T)$  с радиусом  $R_T$  можно потребовать выполнения для всех  $p \in \mathcal{S}$  опорного принципа для множества  $\mathcal{R}(t)$ : существует  $R_T > 0$ , такое что

$$(14) \quad \mathcal{R}(t) \subset B_{R_T}(\mathcal{R}(t)(p) - R_T p), \quad \forall p \in \mathcal{S}.$$

Предположение 2(а), относящееся к  $\mathcal{M}$ , должно быть выполнено.

В данной ситуации множество  $Z(t) = \mathcal{R}(t) + (-\mathcal{M}_0)$  удовлетворяет опорному принципу для всех  $p \in \mathcal{S}$  с радиусом  $R = R_T + R_0$ :

$$Z(t) \subset B_R(\mathcal{N}(t)(p) - R p), \quad \forall p \in \mathcal{S}.$$

Для любых  $p, q \in \mathcal{S}$  получаем

$$\|\mathcal{N}(t)(p) - R p - \mathcal{N}(t)(q)\|^2 \leq R^2, \quad \|\mathcal{N}(t)(q) - R q - \mathcal{N}(t)(p)\|^2 \leq R^2$$

$$\text{и} \quad \|\mathcal{N}(t)(p) - \mathcal{N}(t)(q)\|^2 \leq 2R(p, \mathcal{N}(t)(p) - \mathcal{N}(t)(q)),$$

$$\|\mathcal{N}(t)(q) - \mathcal{N}(t)(p)\|^2 \leq 2R(q, \mathcal{N}(t)(q) - \mathcal{N}(t)(p)) = 2R(-q, \mathcal{N}(t)(p) - \mathcal{N}(t)(q)),$$

следовательно,  $\|\mathcal{N}(t)(p) - \mathcal{N}(t)(q)\| \leq R\|p - q\|$ . Принимая во внимание, что для любых  $p, q \in \mathcal{S}$  меньшая дуга окружности радиуса 1 с центром в 0 и концевыми точками  $p, q$  лежит в  $\mathcal{S}$ , можно повторить доказательства теорем 1 и 2 в рассматриваемом случае. Для обобщения теоремы 1 нужно брать  $p, q \in \mathbb{R}^n$  с  $\frac{p}{\|p\|}, \frac{q}{\|q\|} \in \mathcal{S}$ , т.е. условие Липшица будет доказываться на множестве  $\left\{ p \in \mathbb{R}^n : 1 - \varepsilon \leq \|p\| \leq 1 + \varepsilon, \frac{p}{\|p\|} \in \mathcal{S} \right\}$ .

### 3. Задача (P2)

**Используемые предположения:** 1, 2(b), 3.

Фиксируем  $\varepsilon \in (0, r - R_T)$ . Рассмотрим  $\varepsilon$ -окрестность  $\mathcal{R}_\varepsilon(t) = \mathcal{R}(t) + \mathcal{B}_\varepsilon(0)$  множества  $\mathcal{R}(t)$ . Включение  $\mathcal{R}(t) \subset \mathcal{M}$  означает, что

$$\max_{x \in \mathcal{R}_\varepsilon(t)} \varrho(x, \mathcal{M}) \leq \varepsilon,$$

и наоборот, если  $\max_{x \in \mathcal{R}_\varepsilon(t)} \varrho(x, \mathcal{M}) > \varepsilon$ , то  $\mathcal{R}(t) \not\subset \mathcal{M}$ . На языке опорных функций можно поставить следующую эквивалентную задачу: найти минимум функции  $f(p) = s(p, \mathcal{M}) - s(p, \mathcal{R}_\varepsilon(t))$ :

$$(15) \quad \min_{\|p\|=1} f(p) = J.$$

Если  $J \geq -\varepsilon$ , то  $\mathcal{R}(t) \subset \mathcal{M}$ , в случае  $J < -\varepsilon$  выполнено  $\mathcal{R}(t) \not\subset \mathcal{M}$ .

Пусть  $\mathcal{S}_1 = \{p : \|p\| = 1\}$  и  $\mathcal{S} = \{p \in \mathcal{S}_1 : f(p) \leq 0\}$ ,  $p_0 \in \mathcal{S}_1$  – решение (15).

Предположим, что  $\mathcal{S} \neq \emptyset$ . Рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$(16) \quad p_1 \in \mathcal{S}, \quad p_{k+1} = P_{\mathcal{S}_1}(p_k - \lambda f'(p_k)).$$

*Теорема 3.* Пусть выполняются предположения раздела 3 и в задаче (15) имеет место  $J < 0$ . Пусть  $r_0 = r - R_T - \varepsilon > 0$ ,  $L = \|\mathcal{M}^* \mathcal{R}_\varepsilon(t)\| > 0$ . Тогда для любых  $p_1 \in \mathcal{S}$  и  $0 < \lambda \leq \min\{r_0^2/R_0^3, 1/(2L), 1/(2R_0)\}$  итерации (16) сходятся с линейной скоростью к решению  $p_0$ :

$$\|p_{k+1} - p_0\| \leq q \|p_k - p_0\|, \quad q = \sqrt{1 - \frac{2r_0^2}{R_0} \lambda + R_0^2 \lambda^2} \in (0, 1).$$

*Замечание 2.* Как и в разделе 2, вышеприведенные результаты могут быть доказаны при более локальных предположениях. Вместо предположения 1 о сильной выпуклости  $\mathcal{R}(s)$  для всех  $s \in [0, T]$  с радиусом  $R_T$  можно потребовать выполнения для всех  $p \in \mathcal{S}$  опорного условия для множества  $\mathcal{R}(t)$ : существует  $R_T > 0$ , такое что для любого числа  $\varepsilon \in (0, r - R_T)$  выполняется

$$(17) \quad \begin{aligned} \mathcal{M}(p) - \mathcal{R}(t)(p) + \mathcal{R}(t) &\subset B_{R_T}(\mathcal{M}(p) - R_T p) \subset \\ &\subset B_{r-\varepsilon}(\mathcal{M}(p) - (r - \varepsilon)p) \subset \mathcal{M}, \quad \forall p \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Предположения 2(b), 3, касающиеся  $\mathcal{M}$ , должны выполняться.

В рассматриваемой ситуации имеем

$$(18) \quad \mathcal{M}(p) - \mathcal{R}(t)(p) - \varepsilon p + \mathcal{R}_\varepsilon(t) \subset \mathcal{M}, \quad \forall p \in \mathcal{S}$$

и, следовательно,  $f'(p) = \mathcal{M}(p) - \mathcal{R}(t)(p) - \varepsilon p = \mathcal{M}(p) - \mathcal{R}_\varepsilon(t)(p) = (\mathcal{M}^* \mathcal{R}_\varepsilon(t))(p)$  для всех  $p \in \mathcal{S}$ , так как  $f'(p) \in \mathcal{M}^* \mathcal{R}_\varepsilon(t)$  и  $(p, f'(p)) = s(p, \mathcal{M}^* \mathcal{R}_\varepsilon(t))$  для всех  $p \in \mathcal{S}$ . Действительно, фиксируем  $p \in \mathcal{S}$ . Из включения  $f'(p) + \mathcal{R}_\varepsilon(t) \subset \mathcal{M}$  получаем  $f'(p) \in \mathcal{M}^* \mathcal{R}_\varepsilon(t)$ . С другой стороны,  $(p, f'(p)) + s(p, \mathcal{R}_\varepsilon(t)) = s(p, \mathcal{M})$  и, таким образом,  $(p, f'(p)) = s(p, \mathcal{M}) - s(p, \mathcal{R}_\varepsilon(t)) \geq \text{co}(s(p, \mathcal{M}) - s(p, \mathcal{R}_\varepsilon(t))) = s(p, \mathcal{M}^* \mathcal{R}_\varepsilon(t))$ .

Дальнейшие шаги повторяют доказательство теоремы 3.

#### 4. Задача (P3)

**Используемые предположения:** 1, 3, 4, 5.

Из леммы 3 следует, что множество  $\mathcal{R}(t)$  является равномерно гладким с постоянной  $r(t)$ , следовательно  $R_T \geq r(t)$ .

Фиксируем  $\varepsilon \in (0, r(t) - R_0)$ . Рассмотрим  $\varepsilon$ -окрестность  $\mathcal{M}_\varepsilon = \mathcal{M} + \mathcal{B}_\varepsilon(0)$  множества  $\mathcal{M}$ . Включение  $\mathcal{R}(t) \supset \mathcal{M}$  означает, что

$$\max_{x \in \mathcal{M}_\varepsilon} \varrho(x, \mathcal{R}(t)) \leq \varepsilon,$$

и наоборот, если  $\max_{x \in \mathcal{M}_\varepsilon} \varrho(x, \mathcal{R}(t)) > \varepsilon$ , то  $\mathcal{R}(t) \not\supset \mathcal{M}$ . На языке опорных функций формулируется следующая эквивалентная задача: найти минимум функции  $f(p) = s(p, \mathcal{R}(t)) - s(p, \mathcal{M}_\varepsilon) = s(p, \mathcal{R}(t)) - s(p, \mathcal{M}) - \varepsilon \|p\|$ :

$$(19) \quad \min_{\|p\|=1} f(p) = J.$$

Если  $J \geq -\varepsilon$ , то  $\mathcal{R}(t) \supset \mathcal{M}$ , если же  $J < -\varepsilon$ , то  $\mathcal{R}(t) \not\supset \mathcal{M}$ .

Как обычно,  $\mathcal{S}_1 = \{p : \|p\| = 1\}$  и  $\mathcal{S} = \{p \in \mathcal{S}_1 : f(p) \leq 0\}$ . Пусть  $p_0 \in \mathcal{S}_1$  — решение задачи (19).

Предполагаем, что  $\mathcal{S} \neq \emptyset$ . Рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$(20) \quad p_1 \in \mathcal{S}, \quad p_{k+1} = P_{\mathcal{S}_1}(p_k - \lambda f'(p_k)).$$

*Теорема 4.* Пусть выполняются предположения раздела 4, причем в задаче (19) выполняется  $J < 0$ . Пусть  $r = r(t) - R - \varepsilon > 0$ ,  $L = \|\mathcal{R}(t) \overset{*}{\mathcal{M}_\varepsilon}\|$ . Тогда для любых  $p_1 \in \mathcal{S}$  и  $0 < \lambda \leq \min\{r^2/R_T^3, 1/(2L), 1/(2R_T)\}$  итерации (20) сходятся с линейной скоростью к решению  $p_0$ :

$$\|p_{k+1} - p_0\| \leq q \|p_k - p_0\|, \quad q = \sqrt{1 - \frac{2r^2}{R_T} \lambda + R_T^2 \lambda^2} \in (0, 1).$$

*Замечание 3.* Как и в разделе 3, результаты верны при более локальных предположениях. Вместо сильной выпуклости  $\mathcal{M}$  с радиусом  $R_0$  в предположении 3 можно потребовать выполнения для всех  $p \in \mathcal{S}$  опорного принципа для множества  $\mathcal{M}$ : существует  $R_0 > 0$ , такое что

$$(21) \quad \mathcal{M} \subset B_{R_0}(\mathcal{M}(p) - R_0 p), \quad \forall p \in \mathcal{S}.$$

Предположения 1, 4 и 5 должны выполняться.

#### 5. Выбор начального приближения $p_1$ в методе проекции градиента

Начальный вектор  $p_1$  выбирается методом случайного поиска: в задачах (P1)–(P3) берем (равномерно распределенный) случайный вектор  $p_1 \in \mathcal{S}_1 =$

$= \{p \in \mathbb{R}^n : \|p\| = 1\}$  и проверяем неравенство  $f(p_1) \leq 0$ . Если оно не выполнено, то выбирается еще один случайный вектор  $p_1 \in \mathcal{S}_1$  и так далее. В данном разделе оценим вероятность  $\mathbb{P}(\{f(p_1) \leq 0\})$  нахождения подходящего вектора  $p_1$ . Для определенности, рассмотрим задачу (P1) для фиксированного  $t > 0$ . Напомним, что  $J < 0$  – решение задачи (11). По предположениям для задачи (P1) множество  $\mathcal{N}(t)$  сильно выпукло с радиусом  $R > 0$ . Обозначим  $z_0 = P_{\mathcal{N}(t)}0$ ,  $p_0 = -z_0/\|z_0\|$ . Для множества  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$  обозначим через  $\text{cone } \mathcal{M}$  (выпуклую) коническую оболочку, т.е.  $\text{cone } \mathcal{M} = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : x_i \in \mathcal{M}, \lambda_i \geq 0\}$ . Для пары точек  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq y$ , определим луч  $[x, y) = \{x + t(y - x) : t \geq 0\}$ .

Пусть  $D > 0$  и  $H = \{x \in \mathbb{R}^n : (p_0, x - z_0) = 0\}$ . Предположим, что  $\mathcal{K} = \text{cone}(H \cap B_D(z_0)) \supset \text{cone } \mathcal{N}(t)$ . К примеру,  $D$  можно взять равным диаметру множества  $\mathcal{N}(t)$ , т.е.  $D = \sup_{x, y \in \mathcal{N}(t)} \|x - y\|$ .

Множество  $\mathcal{K}$  – конус вращения с осью  $[0, z_0)$ . Угол между осью и образующей равен  $\alpha$ ,  $\text{tg } \alpha = \frac{D}{|J|}$ . Поляра  $\mathcal{K}^- = \{p \in \mathbb{R}^n : (p, q) \leq 0 \quad \forall q \in \mathcal{K}\}$  также является конусом вращения с осью  $[0, -z_0)$ , для которого угол между осью и образующей равен  $\beta = \frac{1}{2}\pi - \alpha$ , таким образом,  $\cos \beta = \frac{D}{\sqrt{D^2 + J^2}}$ .

По определению  $\mathcal{K}$  имеем для всех  $p_1 \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{K}^-$  неравенство  $f(p_1) \leq 0$ . Обозначим  $\mathcal{S}_{\text{cap}} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{K}^-$  и  $\mathcal{S}_0 = \mathcal{K}^- \cap H_0$ , где  $H_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : (p_0, x) = \cos \beta\}$ . Заметим, что  $\mathcal{S}_0 = H_0 \cap B_{r_0}(p_0 \cos \beta)$ , где  $r_0 = \sin \beta = \frac{|J|}{\sqrt{D^2 + J^2}}$ .  $(n-1)$ -мера Лебега,  $\mu_{n-1}\mathcal{S}_0 \leq \mu_{n-1}\mathcal{S}_{\text{cap}}$ . Таким образом,

$$\mathbb{P}(\{f(p_1) \leq 0\}) \geq \frac{\mu_{n-1}\mathcal{S}_{\text{cap}}}{\mu_{n-1}\mathcal{S}_1} \geq \frac{\mu_{n-1}\mathcal{S}_0}{\mu_{n-1}\mathcal{S}_1} = \frac{r_0^{n-1} V_{n-1}}{n V_n} = \frac{1}{n} \frac{V_{n-1}}{V_n} \left( \frac{|J|}{\sqrt{D^2 + J^2}} \right)^{n-1},$$

где  $V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$  – объем единичного шара в  $\mathbb{R}^n$ .

Предположим теперь что  $B_r(z_0 - rp_0) \subset \mathcal{N}(t)$  для некоторого  $r > 0$ . Рассмотрим конус вращения  $\mathcal{K} = \text{cone } B_r(z_0 - rp_0) \subset \text{cone } \mathcal{N}(t)$  с осью  $[0, z_0)$ . Угол между осью и образующей  $\mathcal{K}$  равен  $\alpha$ ,  $\sin \alpha = \frac{r}{r+|J|}$ . Возьмем полярную  $\mathcal{K}^- \supset (\text{cone } \mathcal{N}(t))^-$  с углом  $\beta$  между осью  $[0, -z_0)$  и образующей,  $\cos \beta = \frac{r}{r+|J|}$ . Имеем для произвольных  $p_1 \in \mathcal{S}_1 : f(p_1) \leq 0$ , что  $p_1 \in \mathcal{S}_{\text{cap}}$ . Как и ранее,  $\mathcal{S}_{\text{cap}} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{K}^-$ . Определим  $\mathcal{S}_0^1 = \mathcal{K}^- \cap H_1$ , где  $H_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : (p_0, x) = 1\}$ . Используя элементарную планиметрию, можно получить, что  $\mathcal{S}_0^1 = H_1 \cap B_{r_1}(p_0)$ ,  $r_1 = \text{tg } \beta = \frac{\sqrt{2r|J|+|J|^2}}{r}$ . Тогда  $\mu_{n-1}\mathcal{S}_0^1 \geq \mu_{n-1}\mathcal{S}_{\text{cap}}$  и

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{f(p_1) \leq 0\}) &\leq \frac{\mu_{n-1}\mathcal{S}_{\text{cap}}}{\mu_{n-1}\mathcal{S}_1} \leq \frac{\mu_{n-1}\mathcal{S}_0^1}{\mu_{n-1}\mathcal{S}_1} = \\ &= \frac{r_1^{n-1} V_{n-1}}{n V_n} = \frac{1}{n} \frac{V_{n-1}}{V_n} \left( \frac{\sqrt{2r|J|+|J|^2}}{r} \right)^{n-1}. \end{aligned}$$

В итоге для множества  $\mathcal{N}(t)$  диаметром  $D$ , являющегося равномерно гладким с постоянной  $r$ , получаем

$$(22) \quad \frac{1}{n} \frac{V_{n-1}}{V_n} \left( \frac{|J|}{\sqrt{D^2 + J^2}} \right)^{n-1} \leq \mathbb{P}(\{f(p_1) \leq 0\}) \leq \frac{1}{n} \frac{V_{n-1}}{V_n} \left( \frac{\sqrt{2r|J| + |J|^2}}{r} \right)^{n-1}.$$

Подобно правой (верхней) оценке в (22) для  $R$ -сильно выпуклого множества  $\mathcal{N}(t)$  можно доказать оценку снизу

$$\frac{1}{n} \frac{V_{n-1}}{V_n} \left( \frac{\sqrt{2R|J| + |J|^2}}{R + |J|} \right)^{n-1} \leq \mathbb{P}(\{f(p_1) \leq 0\}).$$

Эта оценка показывает, что  $\mathbb{P}(\{f(p_1) \leq 0\}) \asymp |J|^{n-1}$  при  $J \rightarrow 0$ . В рассматриваемых задачах  $|J|$  имеет порядок  $\varepsilon > 0$ , и в данном случае левое неравенство в (22) дает более разумную оценку, так как в большинстве примеров значение  $D$  гораздо меньше  $R$ .

Полученная вероятность может быть очень мала и сильно влияет на вычисления, в частности, когда  $|J|$  близко к нулю или  $n$  велико. В экспериментах в приведенных ниже примерах для  $n$  в пределах  $3 \leq n \leq 12$  вектор  $p_1$  был найден не более чем за несколько десятков попыток для задач (P1), (P2). В задаче (P3) иногда требовалось около 1000 попыток для нахождения подходящего  $p_1$ . Одна из причин относительной эффективности при поиске  $p_1$  случайным поиском заключается в том, что в оценках выше можно выбирать  $D > 0$  много меньше, чем диаметр  $\mathcal{N}(t)$ . На самом деле достаточно такого  $D > 0$ , для которого выполнено включение  $\text{cone}(H \cap B_D(z_0)) \supset \text{cone} \mathcal{N}(t)$ .

В ряде случаев  $p_1$  можно выбирать детерминированно, см. алгоритм из раздела 6 для нахождения минимального времени  $t$  при  $\rho(\mathcal{R}(t), \mathcal{M}) = 0$ .

Выбор шага  $\lambda$  в алгоритмах решения задач (P1)–(P3) можно осуществлять методом Армихо. Его подробное описание приведено в [29].

## 6. Моделирование и примеры

Некоторые из приведенных примеров имеют малую размерность ( $n = 3$ ) для удобства интерпретации. Как показывает объяснение ниже, скорость сходимости для таких примеров и примеров большей размерности практически одна и та же.

Множества достижимости построены с помощью пакета программ на Python [30].

### 6.1. Задача (P1). Пример 1.

В этом примере находится момент времени, при котором множество достижимости  $\mathcal{R}$  касается целевого множества  $\mathcal{M}$ .

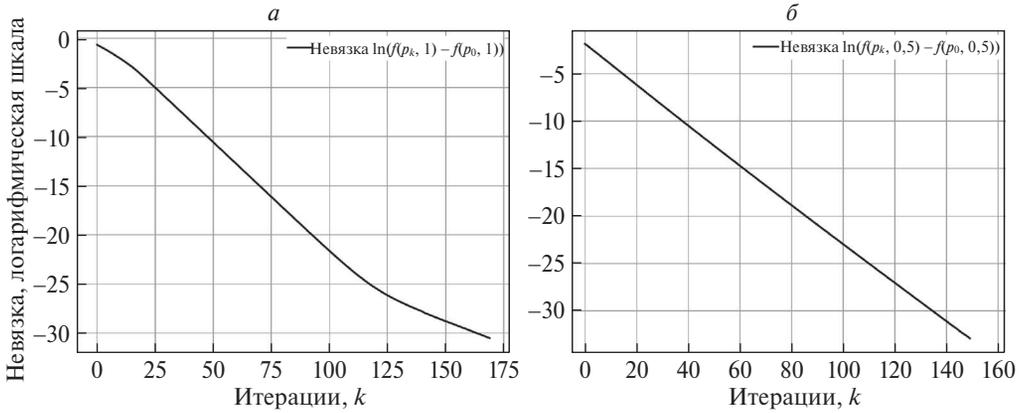


Рис. 2. Графики сходимости метода проекции градиента с размером шага  $\lambda = 0,1$ . (а) задача (P1), пример 1, (б) задача (P1), пример 2.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= Ax + Bu, \quad x(0) = 0, \\
 u &\in \mathbb{R} : |u| \leq 1,
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1,3 & 1 & 0 \\ 0 & -1,3 & 1 \\ 0 & 0 & -1,3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Целевым множеством является  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + B_r(0)$ , где  $\mathcal{M}_0$  – шар  $B_{0,2}(0,7, -0,3, 0,35)$ ,  $r = 0,5$ . Напомним, что  $f(p)$  в задаче (11) зависит от  $t$ , т.е.  $f(p, t) = s(p, \mathcal{R}(t)) + s(p, -\mathcal{M}_0)$ .

Сначала рассмотрим вспомогательную задачу поиска расстояния между множествами  $\mathcal{R}(t)$  и  $\mathcal{M}$  для  $t = 1$ , с начальным условием  $p_1 = (0,03123620, -0,72453809, 0,68852659)$ ,  $f(p_1, 1) = -0,05270947$ .

На рис. 2,а показана сходимость метода проекции градиента для вспомогательной задачи  $\min_{\|p\|=1} f(p, t)$ . Скорость сходимости линейная, с оценкой  $f(p_k, 1) - f(p_0, 1) \approx 0,2486 \times 0,8304^k$ . Найденное оптимальное значение  $p_0 = (0,87540058, -0,46926876, 0,11602002)$ ,  $f(p_0, 1) = -0,57398898$ .

Множество достижимости и ближайшая к целевому множеству точка изображены на рис. 3.

При поиске оптимального времени касания заранее известен только интервал поиска  $[0, T]$ , но не начальное приближение  $p_1$  для произвольно выбранного момента времени из этого интервала. Есть две разные стратегии. Первый – случайно выбирать  $p_1 \in \mathcal{S}_1$ , такой что  $f(p_1, t) < 0$  для данного  $t$ , и увеличивать  $t$  на небольшую величину. Второй алгоритм более сложный и использует временной характер задачи (P1). Этот алгоритм отслеживает подходящее начальное приближение  $p(t)$ ,  $f(p, t) < 0$  при увеличении времени.

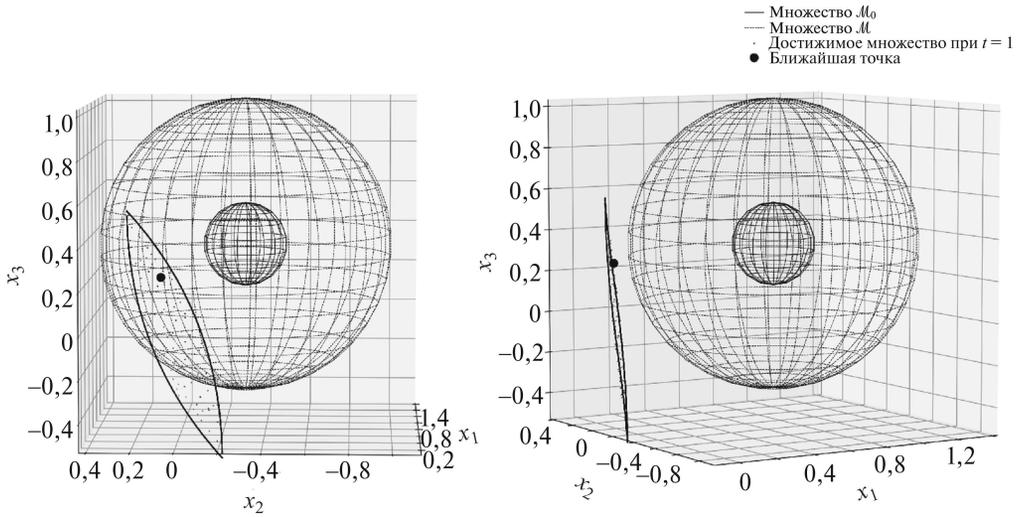


Рис. 3. Ближайшая к целевому множеству  $\mathcal{M}$  точка множества достижимости  $\mathcal{R}(t)$  для  $t = 1$ , найденная методом проекции градиента (задача (P1), пример 1).

### Алгоритм для задачи (P1) (поиск минимального времени)

Информация:  $T > 0$ ,  $r > 0$ , функция  $f(p, t)$ , требуемая точность  $\varepsilon_{\text{tol}} > 0$ , ограничения  $t_{\text{lower}} = 0$ ,  $t_{\text{upper}} = T$ , начальный шаг по времени  $\Delta_t > 0$ .

1. Положим  $t \leftarrow 0$  и найдем начальное приближение  $p_1$ , удовлетворяющее  $f(p_1, 0) < 0$ . Далее запустим метод проекции градиента, который даст  $p(0) = \arg \min_{\|p\|=1} f(p, 0) : f(p(0), 0) < 0$ .
2. Положим  $t_{\text{test}} = \min\{t + \Delta_t, t_{\text{upper}}\}$ .  
Если  $f(p(t), t_{\text{test}}) \geq 0$ , то полагаем  $\Delta_t \leftarrow \Delta_t/2$  и повторяем этот шаг.  
Если  $f(p(t), t_{\text{test}}) < 0$ , то переходим к шагу 3.
3. Запустим метод проекции градиента (13) для функции  $f(p, t_{\text{test}})$  с начальной точкой  $p_1 = p(t)$ . Это дает  $p_0$  и  $J = f(p_0, t_{\text{test}}) = \min_{\|p\|=1} f(p, t_{\text{test}}) < 0$ .
4. Если  $J > -r + \varepsilon_{\text{tol}}$ , то множество достижимости в момент  $t_{\text{test}}$  пересекается с множеством  $\mathcal{M}$ . Обновим  $t_{\text{upper}} \leftarrow t_{\text{test}}$ ,  $\Delta_t \leftarrow \frac{1}{2} \min\{\Delta_t, t_{\text{upper}} - t_{\text{lower}}\}$  и перейдем к шагу 2 с теми же  $t$  и  $p(t)$ . Иначе переходим к шагу 5.
5. Если  $J < -r - \varepsilon_{\text{tol}}$ , то множество достижимости еще не достигло множества  $\mathcal{M}$ . Обновим  $t_{\text{lower}} \leftarrow t_{\text{test}}$ ,  $\Delta_t \leftarrow \min\{2\Delta_t, \frac{t_{\text{upper}} - t_{\text{lower}}}{2}\}$ .  
Также обновим  $t \leftarrow t_{\text{test}}$ ,  $p(t) \leftarrow p_0$  и перейдем к шагу 2.  
Иначе переходим к конечному шагу 6.
6. Решение найдено с требуемой точностью:  $|J + r| \leq \varepsilon_{\text{tol}}$ . Возвращаем  $t_0 = t_{\text{test}}$ , как оптимальное время для задачи (P1), и  $p_0$ .

Замечания: алгоритм реализует метод наподобие поиска делением пополам на отрезке  $[0, T]$ . Вероятность найти подходящее  $p_1$  на шаге 1 может быть оценена с использованием результатов раздела 5. Тем не менее начальное приближение может быть получено без случайного поиска в шаге 1. Так

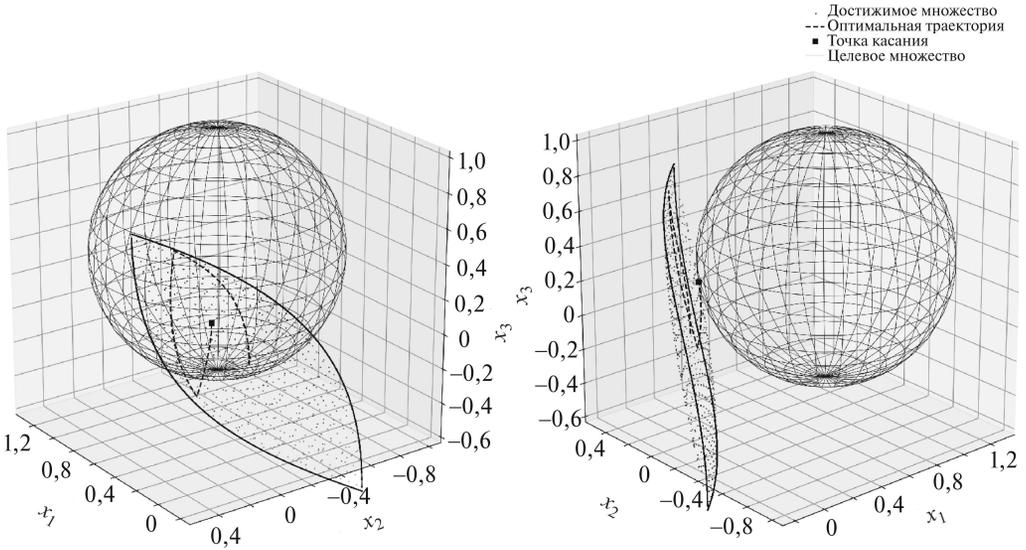


Рис. 4. Множество достижимости в момент касания целевого множества и оптимальная траектория (задача (P1), пример 1).

как  $\mathcal{R}(0) = 0$ , то достаточно найти единичный отделяющий вектор  $p_1 \in \mathbb{R}^n$  для  $\mathcal{M}$ , такой что  $(p_1, x) < 0$  для всех  $x \in -\mathcal{M}_0$ . Далее каждый раз на шаге 2 начальное приближение  $p_1$  в методе проекции градиента выбирается детерминированным образом. На шаге 5 шаг времени удваивается для ускорения поиска. Алгоритм также можно применять, если значение  $T$  неизвестно (т.е.  $t_{\text{upper}} = \infty$ ), но для  $t_{\text{upper}} > T$  необходимые условия сходимости метода проекции градиента могут нарушаться. Тем не менее соблюдается инвариант  $t_{\text{lower}} \leq t_{\text{test}} \leq t_{\text{upper}}$ .

Алгоритм останавливается при получении  $J$  с заданной точностью  $\varepsilon_{\text{tol}}$ , во всех примерах далее  $\varepsilon_{\text{tol}} = 10^{-7}$  и в результате получены  $t_{\text{upper}} - t_{\text{lower}} \sim 10^{-6}$ . Также можно останавливаться при достижении требуемой точности по времени  $t$ : т.е. при  $t_{\text{upper}} - t_{\text{lower}} \leq \varepsilon_{\text{time}}$  заканчиваем вычисления и берем  $t \in [t_{\text{lower}}, t_{\text{upper}}]$ . Здесь  $\varepsilon_{\text{time}} > 0$  – допустимая ошибка по времени.

Для системы (23) алгоритм сходится за 21 шаг. Найденное оптимальное время равно 2,73838424 при

$$p_0 = (0,77091811, -0,60777697, 0,19050571).$$

На рис. 4 изображено множество достижимости и целевое множество в момент касания, а также оптимальная траектория (9) с двумя переключениями, приводящая к целевому множеству [24].

Как было показано во введении, множество достижимости  $\mathcal{R}(t)$  системы (23) не является сильно выпуклым. Для  $\mathcal{U} = B[-1, 1]$  и  $t > 0$  получаем  $s(p, \mathcal{R}(t)) = \int_0^t e^{-1,3s} |p_1 \frac{s^2}{2} + p_2 s + p_3| ds$  для любого  $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathcal{S}_1$ . Для решения  $p_0 = (0,77091811, -0,60777697, 0,19050571)$  и  $t = 2,73838424$  по-

лучаем корни  $s_1(p_0) < s_2(p_0)$  уравнения  $p_1 \frac{s^2}{2} + p_2 s + p_3 = 0$  для  $p = p_0$ . По теореме об обратной функции корни  $\mathcal{S}_1 \ni p \rightarrow s_i(p)$ ,  $i = 1, 2$ , уравнения  $p_1 \frac{s^2}{2} + p_2 s + p_3 = 0$  аналитичны в некоторой окрестности точки  $p_0 \in \mathcal{S}_1$ . Другими словами, существует число  $\gamma > 0$ , такое что функции

$$\mathcal{S}_1 \cap B_\gamma(p_0) \ni p \rightarrow s_i(p), \quad i = 1, 2,$$

являются липшицевыми некоторой постоянной  $L > 0$ . Более того, можно выбрать такое число  $\gamma > 0$ , что первые компоненты векторов из  $\mathcal{S}_1 \cap B_\gamma(p_0)$  положительны и  $\max\{s_1(p), s_1(q)\} \leq \min\{s_2(p), s_2(q)\}$  для всех  $p, q \in \mathcal{S}_1 \cap B_\gamma(p_0)$ .

Фиксируем пару точек  $p, q \in \mathcal{S}_1 \cap B_\gamma(p_0)$ . Положим  $M = \max_{s \in [0, t]} \|e^{As}\|$ . Тогда  $|s_i(p) - s_i(q)| \leq L\|p - q\|$  для  $i = 1, 2$ , и используя оценку  $\|\mathcal{U}(e^{A^\top s p}) - \mathcal{U}(e^{A^\top s q})\| \leq 2$ , получаем для опорного элемента

$$\|\mathcal{R}(t)(p) - \mathcal{R}(t)(q)\| = \sum_{i=1}^2 \left\| \int_{s_i(p)}^{s_i(q)} e^{As} (\mathcal{U}(e^{A^\top s p}) - \mathcal{U}(e^{A^\top s q})) ds \right\| \leq 4ML\|p - q\|.$$

Таким образом, поверхность  $\{\mathcal{R}(t)(p) : p \in \mathcal{S}_1 \cap B_\gamma(p_0)\}$  – это часть сильно выпуклого множества с радиусом  $R = 4ML$ . В текущем примере этого достаточно для сходимости метода проекции градиента для времени  $t$ . Та же ситуация имеет место для ранних моментов времени.

## 6.2. Задача (P1). Пример 2.

Рассмотрим пример в  $\mathbb{R}^{12}$

$A = \text{diag}(-0,3, -0,8, -1, -0,7, -0,71, -0,52, -0,37, -0,05, -0,25, -0,89, -0,99, -0,2)$ ,  $\mathcal{U} = B_1(0)$ . Целевым множеством является  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + B_r(0)$ , где  $\mathcal{M}_0$  – шар  $B_{0,4}(0,3 \times \mathbf{1})$  ( $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$ ),  $r = 0,2$ , размер шага  $\lambda = 0,1$ .

Рисунок 2,б: Сходимость метода проекции градиента для вспомогательной задачи  $\min_{\|p\|=1} f(p, t)$  для времени  $t = 0,5$  и начального условия

$$p_1 = (0,02046203, 0,24278712, 0,21998230, 0,33539534, 0,11750331, \\ 0,07584814, 0,44196329, 0,14159412, 0,08314335, \\ 0,32560626, 0,49401057, 0,43339861),$$

где  $f(p_1, 0,5) = -0,04771303$ .

Оценка скорости сходимости:  $f(p_k, 0,5) - f(p_0, 0,5) \approx 0,1218 \times 0,8122^k$ .

Оптимальное значение равно

$$p_0 = (0,27300370, 0,30197686, 0,31253360, 0,29647251, 0,29702965, \\ 0,28619273, 0,27727228, 0,25724610, 0,26991497, \\ 0,30680235, 0,31202019, 0,26679398),$$

где  $f(p_0, 0,5) = -0,20238418$ .

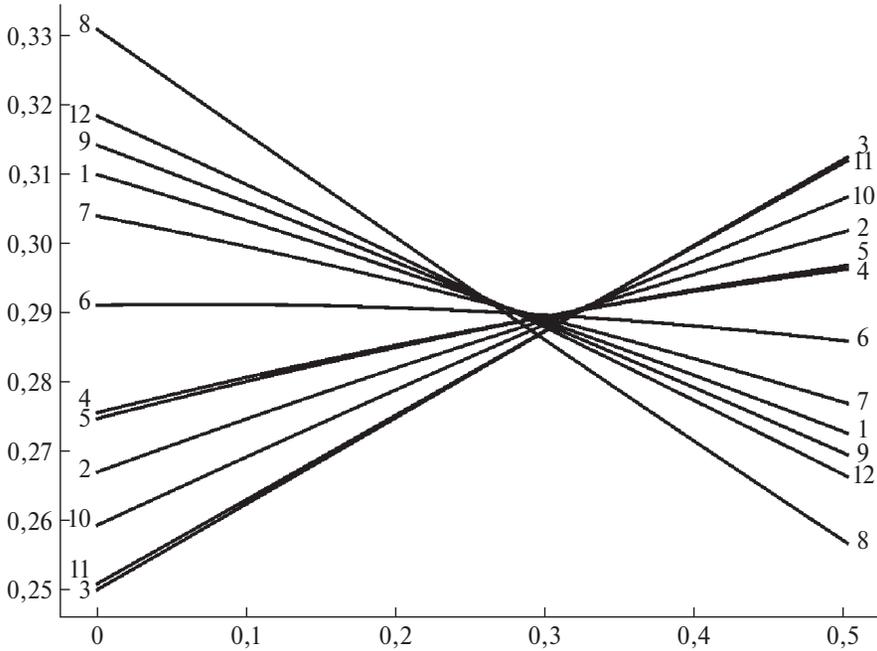


Рис. 5.  $k$ -е компоненты  $u_k$  оптимального управления (задача (P1), пример 2).

Алгоритм сходится за 21 шаг к точке

$$p_0 = (0,27281666, 0,30212210, 0,31280135, 0,29655398, 0,29711758, \\ 0,28615572, 0,27713348, 0,25688441, 0,26969324, \\ 0,30700357, 0,31228196, 0,26653741),$$

полученное оптимальное время равно 0,50315046.

Рисунок 5 показывает оптимальное управление (покомпонентно, каждая линия изображает одну из 12 компонент).

### 6.3. Задача (P2). Пример 3.

Множество достижимости касается целевого множества внутренним образом, оно такое же, как в задаче (P1), пример 1 (формула (23)).

Целевое множество – эллипсоид  $\mathcal{M} = \{x : (x - c)^\top Q(x - c) \leq R^2\}$ , где

$$Q = \begin{bmatrix} 4,5 & -1,2 & -1,6 \\ -1,2 & 6,8 & -2,3 \\ -1,6 & -2,3 & 8 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -3,4 \\ -3,8 \\ 0,3 \end{bmatrix}, \quad R = 12.$$

Напомним, что  $f(p, t) = s(p, \mathcal{M}) - s(p, \mathcal{R}_\varepsilon(t))$ , здесь взято  $\varepsilon = 0,05$ , размер шага  $\lambda = 0,2$ .

Рисунок 6: для системы (23) похожий алгоритм деления пополам сходится за 19 шагов (т.е.  $|J + \varepsilon| \leq \varepsilon_{\text{tol}} = 10^{-7}$ ). Оптимальное время  $t = 1,64610733$ ,  $p_0 = (0,36800454, 0,72705740 - 0,57962073)$ .

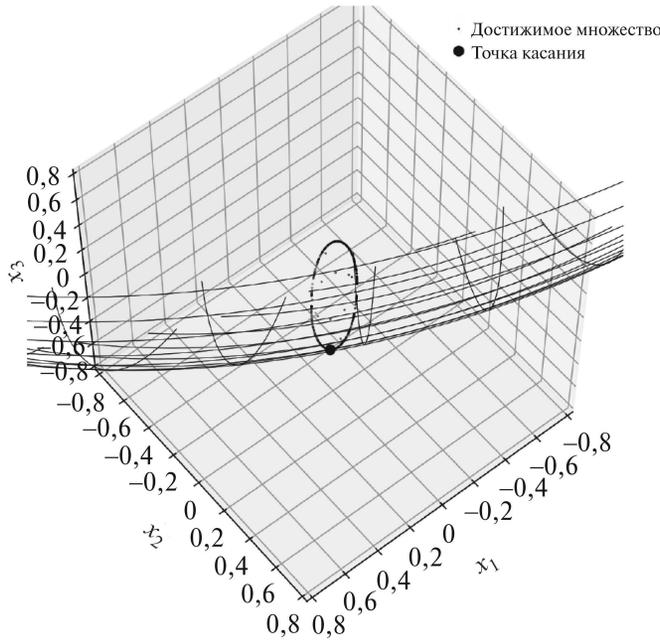


Рис. 6. Решение задачи (P2) для примера 3.

#### 6.4. Задача (P2). Пример 4. Гомотет внутри целевого множества.

Решим задачу (P2) для гомотета, т.е. задачу, поставленную в виде

$$(24) \quad \max_{t \geq 0} t : t\mathcal{R} \subset \mathcal{M}.$$

Определим  $\mathcal{M} = B_{10}(0)$ , т.е. шар с центром в 0 и радиусом 10. Множество  $\mathcal{R}$  – сильно выпуклый отрезок с концами  $[-0,1, 3, 2,05884573]$ ,  $[-1,9, 3, -1,05884573]$  и радиусом сильной выпуклости  $R = 3$ , т.е.  $\mathcal{R}$  – пересечение всех шаров радиуса  $R = 3$ , содержащих обе конечных точки.

Опорный элемент для единичного вектора  $p = (p_1, \dots, p_n)$  и сильно выпуклого отрезка с концами  $[-ae_1, ae_1]$  и радиусом сильной выпуклости  $R > a$  равен  $Rp - \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{\sqrt{1 - p_1^2}}(I - e_1 e_1^T)p$ , если  $\arctg\left(\frac{p_1}{\sqrt{1 - p_1^2}}\right) < \arcsin\left(\frac{a}{R}\right)$ , в противном случае он равен  $\text{sign}(p_1)ae_1$ . Рассмотрим гомотетию  $t\mathcal{R}$  с параметром  $\varepsilon = 0,1$  в определении  $f$  (15) и размером шага  $\lambda = 0,2$ .

Для  $t = 3$  множество  $t\mathcal{R}$  не содержится в  $\mathcal{M}$ , см. рис. 7. Алгоритм, похожий на приведенный для задачи (P2), сходится за 21 шаг к оптимальным значениям  $t_0 = 2,62904820$  и  $p_0 = (-0,34257770, 0,93398621, 0,10153957)$  (т.е.  $|J + \varepsilon| \leq \varepsilon_{\text{tol}} = 10^{-7}$ ).

#### 6.5. Задача (P3). Пример 5.

Рассмотрим пример в  $\mathbb{R}^{10}$

$A = \text{diag}(0,1, 0,75, 0,8, 0,81, 0,82, 0,95, 1,0, 1,0, 1,05, 1,1)$ ,  $\mathcal{U} = B_1(0)$ .

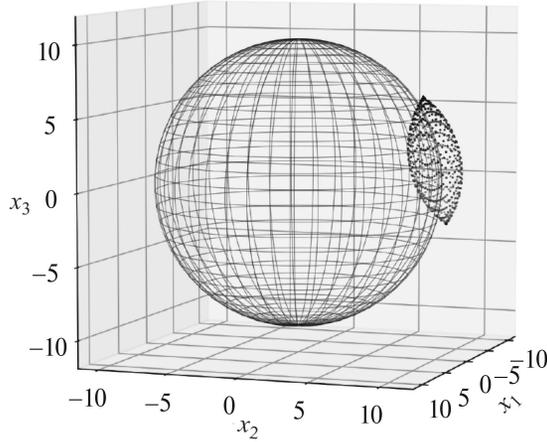


Рис. 7. Задача (P2), пример 4. Гомотет при  $t = 3$  не содержится в  $\mathcal{M}$ .

Целевое множество равно  $\mathcal{M} = B_{0,1}(0, \mathbf{1})$ , ( $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$ ),  $\varepsilon = 0,1$ , размер шага  $\lambda = 0,1$ .

Понадобился 21 запуск метода проекции градиента, чтобы получить решение

$$p_0 = (0,44643102, 0,32328081, 0,31539020, 0,31383560, 0,31228874, \\ 0,29286442, 0,28572048, 0,28572048, 0,27875066, 0,27195027)$$

и оптимальное время 0,35823087.

## 7. Заключение

В работе на основе решения задачи (1) предложены эффективные методы решения ряда задач (P1)–(P3), в том числе задачи поиска расстояния и включения множеств. Доказана линейная скорость сходимости алгоритмов. Рассмотренные примеры показывают эффективность предложенных методов.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство леммы 1.* Умножим обе части неравенства на  $\sqrt{\|p\| \|q\|}$  и возведем в квадрат.

*Доказательство леммы 2.* Из равенства  $e^{As} = J e^{A_1 s} J^{-1}$  получаем

$$\mathcal{R}(t) = \int_0^t J e^{A_1 s} J^{-1} \mathcal{U} ds = \int_0^t J e^{A_1 s} \mathcal{U}_1 ds = J \mathcal{R}_1(t).$$

Требуемое утверждение следует из [25, Теорема 3].

*Доказательство леммы 3.* По определению  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 + \mathcal{B}_r(0)$ . Тогда  $\mathcal{R}(t) = \mathcal{R}_0(t) + r \int_0^t e^{As} \mathcal{B}_1(0) ds$ ,

$$\mathcal{R}_0(t) = \int_0^t e^{As} \mathcal{U}_0 ds.$$

Достаточно показать, что эллипсоид  $e^{As} \mathcal{B}_1(0)$  равномерно гладкий с постоянной  $r(s) = \frac{\lambda_n^2(s)}{\lambda_1(s)}$ . Рассмотрим ортонормированный базис, в котором эллипсоид  $e^{As} \mathcal{B}_1(0)$  принимает канонический вид

$$\mathcal{N} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{\lambda_k^2} \leq 1 \right\}, \quad \lambda_k = \lambda_k(s).$$

Тогда матрица  $L = \text{diag} \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \}$  дает  $L\mathcal{B}_1(0) = \mathcal{N}$ . Эллипсоид  $\mathcal{V} = \{ x : \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 x_k^2 \leq 1 \}$  сильно выпуклый с радиусом  $\rho = \lambda_1/\lambda_n^2$ . Следовательно, существует выпуклый компакт  $\mathcal{P}$ , такой что  $\mathcal{V} + \mathcal{P} = \mathcal{B}_\rho(0)$ . Учитывая, что  $L\mathcal{V} = \mathcal{B}_1(0)$ , получаем:

$$L\mathcal{V} + L\mathcal{P} = L\mathcal{B}_\rho(0) = \rho L\mathcal{B}_1(0) = \rho\mathcal{N} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\rho}\mathcal{B}_1(0) + \frac{1}{\rho}\mathcal{P} = \mathcal{N}.$$

Таким образом множество  $\mathcal{N}$  является равномерно гладким с постоянной  $\frac{1}{\rho} = \lambda_n^2/\lambda_1$ .

*Доказательство теоремы 1.* Пусть  $I$  – единичная матрица,  $p_0 \in \mathcal{S}_1$  – решение задачи (11). Из необходимого условия экстремума имеем  $f(p_0) = (p_0, f'(p_0)) = -\|f'(p_0)\|$ . Тогда  $P_{\mathcal{T}_p} = I - pp^\top$  для любого  $p \in \mathcal{S}_1$  и  $\|(I - pp^\top)f'(p)\|^2 = \|f'(p)\|^2 - f^2(p)$ . Следовательно, для всех  $p \in \mathcal{S}$  получаем

$$\|f'(p)\|^2 - f^2(p) = (\|f'(p)\| - f(p))(\|f'(p)\| + f(p) + f(p) - f(p_0)).$$

Из неравенства  $f(p) \leq 0$  и того, что опорный элемент  $f'(p_0) = \mathcal{N}(t)(p_0)$  имеет минимально возможную норму, получаем, что  $\|f'(p)\| - f(p) \geq \|f'(p)\| \geq \|f'(p_0)\| = |J|$ . Остается заметить, что  $\|f'(p)\| + f(p_0) = \|f'(p)\| - \|f'(p_0)\| \geq 0$ .

Для любых двух векторов  $p, q \in \mathbb{R}^n$ ,  $1 - \varepsilon \leq \|p\|, \|q\| \leq 1 + \varepsilon$  из леммы 1 получаем, что  $\left\| \frac{p}{\|p\|} - \frac{q}{\|q\|} \right\| \leq \frac{\|p - q\|}{\sqrt{\|p\| \|q\|}}$ . Фиксируем такие  $p, q$ . Тогда из липшицевости опорного элемента  $f'(\xi) = \mathcal{N}(t)(\xi)$  на единичной сфере с постоянной  $R$  и равенства  $f'(\xi) = f'(\xi/\|\xi\|)$ , для всех  $\xi \neq 0$ , получаем

$$\|f'(p) - f'(q)\| \leq R \left\| \frac{p}{\|p\|} - \frac{q}{\|q\|} \right\| \leq \frac{R\|p - q\|}{\sqrt{\|p\| \|q\|}} \leq \frac{R}{1 - \varepsilon} \|p - q\|.$$

*Доказательство теоремы 2.* Определим  $q_k = p_k - \lambda f'(p_k)$ ,  $\|q_k\| \geq 1 - \lambda\|f'(p_k)\| \geq 1 - \lambda L \geq \frac{1}{2}$ . Из  $\|p_k\| = \|p_{k+1}\| = 1$ , леммы 1 и неравенства

$$\begin{aligned} \|p_{k+1} - p_k\| &= \|P_{\mathcal{S}_1}(p_k - \lambda f'(p_k)) - p_k\| \leq \frac{\|p_k - q_k\|}{\sqrt{\|p_k\| \|q_k\|}} \leq \\ &\leq \lambda\sqrt{2}\|f'(p_k)\| \leq \lambda\sqrt{2}L \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

получаем  $[p_k, p_{k+1}] \subset \{p \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \leq \|p\| \leq \frac{3}{2}\}$ . По теореме 1  $f'$  имеет постоянную Липшица  $L_1 = R/(1 - \frac{1}{2}) = 2R$  на отрезке  $[p_k, p_{k+1}]$ .

Также имеет место условие LPL для функции  $f$  на множестве  $\mathcal{S}$  по теореме 1 для  $\mu = |J|$ .

Фиксируем  $\lambda$  из предложения и  $\ell = \frac{1}{\lambda} \geq L_1$ . Положим  $z_k = \|\ell p_k - f'(p_k)\| - (p_k, p_k - f'(p_k)) \geq 0$ ,

$$(П.1) \quad z_k = \frac{\|(I - p_k p_k^\top) f'(p_k)\|^2}{\|\ell p_k - f'(p_k)\| + (p_k, p_k - f'(p_k))} \geq \frac{\|(I - p_k p_k^\top) f'(p_k)\|^2}{2\|\ell p_k - f'(p_k)\|}.$$

Имеем

$$\|p_{k+1} - p_k\|^2 = 2 - 2 \frac{(p_k, \ell p_k - f'(p_k))}{\|\ell p_k - f'(p_k)\|} = \frac{2z_k}{\|\ell p_k - f'(p_k)\|}$$

и из липшицевости  $f'$  на отрезке  $[p_k, p_{k+1}]$  с постоянной  $L_1$

$$\begin{aligned} f(p_{k+1}) - f(p_k) &\leq (f'(p_k), p_{k+1} - p_k) + \frac{L_1}{2} \|p_{k+1} - p_k\|^2 = \\ &= (p_k, L_1 p_k - f'(p_k)) - \left( L_1 p_k - f'(p_k), \frac{\ell p_k - f'(p_k)}{\|\ell p_k - f'(p_k)\|} \right) = \\ &= \left( \ell p_k - f'(p_k) + (L_1 - \ell) p_k, p_k - \frac{\ell p_k - f'(p_k)}{\|\ell p_k - f'(p_k)\|} \right), \\ f(p_{k+1}) - f(p_k) &\leq -z_k + (L_1 - \ell) \left( p_k, p_k - \frac{\ell p_k - f'(p_k)}{\|\ell p_k - f'(p_k)\|} \right) = \\ &= -z_k + \frac{L_1 - \ell}{\|\ell p_k - f'(p_k)\|} z_k \leq -z_k. \end{aligned}$$

Из (П.1) и условия LPL с  $\mu = |J|$  получаем, что

$$f(p_{k+1}) - f(p_k) \leq -\frac{\|(I - p_k p_k^\top) f'(p_k)\|^2}{2\|\ell p_k - f'(p_k)\|} \leq -\frac{|J|}{2\|\ell p_k - f'(p_k)\|} (f(p_k) - f(p_0)).$$

Определим  $\varphi(p) = f(p) - f(p_0)$  для всех  $p \in \mathcal{S}_1$ . Из оценки  $\|\ell p_k - f'(p_k)\| \leq \ell + \|f'(p_k)\| \leq \ell + L$  получаем

$$\varphi(p_{k+1}) \leq \left( 1 - \frac{|J|}{2\ell + 2L} \right) \varphi(p_k) = q\varphi(p_k)$$

и  $q \in (0, 1)$ , так как  $|J| = \varrho(0, \mathcal{N}(t)) \leq \|\mathcal{N}(t)\| = L$ .

Для точек  $\{p_k\}$  имеем (заметим, что  $\|p_k - \lambda f'(p_k)\| \geq 1$ )

$$\|p_{k+1} - p_k\|^2 \leq \frac{2z_k}{\|\ell p_k - f'(p_k)\|} \leq \frac{2\lambda(f(p_k) - f(p_{k+1}))}{\|p_k - \lambda f'(p_k)\|} \leq 2\lambda\varphi(p_k).$$

*Доказательство теоремы 3.* Рассмотрим функцию

$$f(p) = s(p, \mathcal{M}_0) + r\|p\| - s(p, \mathcal{R}_\varepsilon(t)).$$

Множество  $\mathcal{R}_\varepsilon(t)$  сильно выпукло с радиусом  $R_T + \varepsilon < r$ . Следовательно, существует выпуклый компакт  $\mathcal{N}(t)$ , такой что  $\mathcal{R}_\varepsilon(t) + \mathcal{N}(t) = \mathcal{B}_{R_T + \varepsilon}(0)$  и  $r\|p\| - s(p, \mathcal{R}_\varepsilon(t)) = (r - R_T - \varepsilon)\|p\| + s(p, \mathcal{N}(t))$ . Таким образом

$$\begin{aligned} f(p) &= s(p, \mathcal{M}_0) + (r - R_T - \varepsilon)\|p\| + s(p, \mathcal{N}(t)) = \\ &= s(p, \mathcal{M}_0 + \mathcal{N}(t) + \mathcal{B}_{r - R_T - \varepsilon}(0)) \end{aligned}$$

и функция  $f(p)$  является опорной функцией множества  $\mathcal{N}(t) = \mathcal{M}^* \mathcal{R}_\varepsilon(t) = \mathcal{M}_0 + \mathcal{N}(t) + \mathcal{B}_{r - R_T - \varepsilon}(0)$ . Это множество сильно выпукло с радиусом  $R_0$  и является равномерно гладким с постоянной  $r_0 = r - R_T - \varepsilon > 0$ . Функция  $f'$  липшицева на  $S_1$  с постоянной  $R_0$  и так же, как в доказательстве теоремы 2,  $[p_k, p_{k+1}] \subset \{p \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \leq \|p\| \leq \frac{3}{2}\}$ . Таким образом, для любого  $p$  из отрезка  $[p_k, p_{k+1}]$  имеем  $\|p\| \geq \frac{1}{2}$  и для любых  $p, q \in [p_k, p_{k+1}]$  по лемме 1

$$\begin{aligned} \|f'(p) - f'(q)\| &= \left\| f' \left( \frac{p}{\|p\|} \right) - f' \left( \frac{q}{\|q\|} \right) \right\| \leq \\ &\leq R_0 \left\| \frac{p}{\|p\|} - \frac{q}{\|q\|} \right\| \leq R_0 \frac{\|p - q\|}{\sqrt{\|p\| \|q\|}} \leq 2R_0 \|p - q\|, \end{aligned}$$

т.е.  $f'$  – липшицево отображение на любом отрезке  $[p_k, p_{k+1}]$  с постоянной  $2R_0$ . Из липшицевости  $f'$  и предложения 2  $f(p_k) \leq 0$  для всех  $k$ .

$$\begin{aligned} \|p_{k+1} - p_0\|^2 &= \|P_{S_1}(p_k - \lambda f'(p_k)) - P_{S_1}(p_0 - \lambda f'(p_0))\|^2, \\ \|p_k - \lambda f'(p_k)\| &\geq 1, \quad \|p_0 - \lambda f'(p_0)\| \geq 1, \end{aligned}$$

т.е.  $p_k - \lambda f'(p_k) \notin \text{int } B_1(0)$ ,  $p_0 - \lambda f'(p_0) \notin \text{int } B_1(0)$ , и тогда

$$\begin{aligned} \|p_{k+1} - p_0\|^2 &\leq \|p_k - p_0 + \lambda(f'(p_k) - f'(p_0))\|^2 \leq \\ &\leq \|p_k - p_0\|^2 - 2\lambda(p_k - p_0, f'(p_k) - f'(p_0)) + \lambda^2 \|f'(p_k) - f'(p_0)\|^2. \end{aligned}$$

Из сильной выпуклости множества  $\mathcal{N}(t)$  с радиусом  $R_0$  имеем  $\|f'(p_k) - f'(p_0)\| \leq R_0 \|p_k - p_0\|$ . Также из сильной выпуклости множества  $\mathcal{N}(t)$  с радиусом  $R_0$  имеем [28, Теорема 2.1 (h)]  $(p_k - p_0, f'(p_k) - f'(p_0)) \geq \frac{1}{R_0} \|f'(p_k) - f'(p_0)\|^2$ . Из равномерной гладкости множества  $\mathcal{N}(t)$  с постоянной  $r_0$  [28, Определение 3.2, Теорема 3.6] имеем

$$(p_k - p_0, f'(p_k) - f'(p_0)) \geq \frac{1}{R_0} \|f'(p_k) - f'(p_0)\|^2 \geq \frac{r_0^2}{R_0} \|p_k - p_0\|^2.$$

Таким образом,  $\|p_{k+1} - p_0\|^2 \leq q^2 \|p_k - p_0\|^2$ .

*Доказательство теоремы 4.* Повторяется доказательство теоремы 3. В частности, функция  $f(p)$  – опорная функция множества  $\mathcal{R}(t) \overset{*}{\mathcal{M}} \mathcal{B}_\varepsilon = \mathcal{R}(t) \overset{*}{\mathcal{M}} \mathcal{B}_\varepsilon(0)$ . Это множество сильно выпукло с постоянной  $R_T$  и является равномерно гладким с постоянной  $r$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ioffe A.D.* Metric regularity – a survey Part I and II // *J. Aust. Math. Soc.* 2016. V. 101. P. 188–243; P. 376–417.
2. *Luke D.R.* Finding best approximation pairs relative to a convex and prox-regular set in a Hilbert space // *SIAM J. Optim.* 2008. V. 19. No. 2. P. 714–739.
3. *Grünewälder S.* Compact convex projections // *J. Mach. Learn. Res.* 2018. V. 18. No. 2019. P. 1–43.
4. *Sosa W., Raupp F.M.P.* An algorithm for projecting a point onto a level set of a quadratic function // *Optimization.* 2022. V. 71. No. 1. P. 71–89.
5. *Bregman L.M., Censor Y., Reich S., Zepkowitz-Malachi Y.* Finding the projection of a point onto the intersection of convex sets via projections onto half-spaces // *J. Approx. Theory.* 2003. V. 124. No. 2. P. 194–218.
6. *Aumann R.* Integrals of set-valued functions // *J. Math. Anal. Appl.* 1965. V. 12. No. 1. P. 1–12.
7. *Ляпунов А.А.* О вполне аддитивных вектор-функциях // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1940. Т. 4. № 6. С. 465–478.
8. *Frankowska H., Olech C.* R-convexity of the integral of the set-valued functions. Contributions to analysis and geometry (Baltimore, Md., 1980) / Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, Md., 1981. P. 117–129.
9. *Vial J.-Ph.* Strong and Weak Convexity of Sets and Functions // *Math. Oper. Res.* 1983. V. 8. No. 2. P. 231–259.
10. *Balashov M.V., Repovš D.* Uniformly convex subsets of the Hilbert space with modulus of convexity of the second order // *J. Math. Anal. Appl.* 2011. V. 377. No. 2. P. 754–761.
11. *Veliou V.M.* On the convexity of integrals of multivalued mappings: application in control theory // *J. Optim. Theor. Appl.* 1987. V. 54. No. 3. P. 541–563.
12. *Veliou V.M.* Second order discrete approximations to strongly convex differential inclusions // *Syst. Control Lett.* 1989. V. 13. No. 3. P. 263–269.
13. *Althoff M., Frehse G., Girard A.* Set propagation techniques for reachability analysis // *Annu. Rev. Control Robot. Auton. Syst.* 2021. V. 4. P. 369–395.
14. *Le Guernic C., Girard A.* Reachability analysis of linear systems using support functions // *Nonlinear Anal. Hybrid Syst.* 2010. V. 4. P. 250–262.
15. *Gruber P.M.* Approximation of convex bodies / Convexity and Its Applications. Basel Birkhäuser, 1983. P. 131–162.
16. *Serry M., Reissig G.* Over-approximating reachable tubes of linear time-varying systems // *IEEE Trans. Automat. Control.* V. 67. No. 1. P. 443–450.
17. *Kurzanski A.B., Varaiya P.* Dynamics and control of trajectory tubes, theory and computation // *Ser. Systems and Control: Foundations and Applications.* Birkhauser/Springer, 2014.
18. *Левитин Е.С., Поляк Б.Т.* Методы минимизации при наличии ограничений // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 1966. Т. 6. № 5. С. 1–50.
19. *Балашов М.В., Половинкин Е.С.* M-сильно выпуклые множества и их порождающие подмножества // *Матем. сб.* 2000. Т. 191. № 1. С. 25–60.
20. *Cannarsa P., Frankowska H.* Interior sphere property of attainable sets and time optimal control problems // *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 2006. V. 12. No. 2. P. 350–370.

21. *Balashov M.V., Polyak B.T., Tremba A.A.* Gradient projection and conditional gradient methods for constrained nonconvex minimization // Numer. Funct. Anal. Optim. 2020. V. 41. No. 7. P. 822–849.
22. *Балашов М.В.* Сильная выпуклость множеств достижимости линейных систем // Матем. сб. 2022. Т. 213. № 5. С. 30–49.
23. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. Наука, 1969.
24. *Тремба А.А.* Вычисление множества достижимости линейных стационарных систем с помощью опорной функции и опорных элементов // Материалы XVI Международной научной конференции Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого). ИПУ РАН, Москва, 2022. С. 437–441.
25. *Половинкин Е.С.* Сильно выпуклый анализ // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 2. С. 259–286.
26. *Bolte J., Sabach Sh., Teboulle M.* Proximal alternating linearized minimization for nonconvex and nonsmooth problems // Math. Program. 2014. V. 146. P. 459–494.
27. *Balashov M.V., Tremba A.A.* Error bound conditions and convergence of optimization methods on smooth and proximally smooth manifolds // Optimization. 2022. V. 71. No. 3. P. 711–735.
28. *Ivanov G.E., Goncharov V.V.* Strong and weak convexity of closed sets in a Hilbert space / Operations Research, Engineering, and Cyber Security. Springer Optimization and Its Applications. Springer, 2017. Vol. 113. P. 259–297.
29. *Балашов М.В., Камалов Р.А.* Метод проекции градиента с шагом Армихо на многообразиях // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 11. С. 1776–1786.
30. *Tremba A.* Computing reachability set with support function and support points: Python code repository. <https://github.com/atremba/lti-reachability-set>

*Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Шербаковым.*

Поступила в редакцию 25.01.2024

После доработки 12.03.2024

Принята к публикации 20.03.2024